МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик

Методы математической физики

Учебное пособие

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2016

Содержание

Тема 1.

Уравнение теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных.

1.1. Задачи для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, не требующие применения специальных функций.

Пусть $u = u(M,t)$ означает температуру в точке $M(x,y,z) \in R^3$ (или $M(x,y) \in R^2$) в момент времени t. Функция $u(M,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$C(M)\rho(M)u_t(M,t) = \\ = div_M\left(k(M)\cdot grad_M u(M,t)\right) + F(M,t).$$

Здесь $C(M)$ – удельная теплоемкость, $\rho(M)$ – объемная плотность массы, $k(M)$ – коэффициент теплопроводности, $F(M,t)$ – объемная плотность мгновенных тепловых источников (если $F > 0$) или стоков (если $F < 0$); $C > 0$, $\rho > 0$, $k > 0$.

Если $C = const$, $\rho = const$, $k = const$, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$u_t(M,t) = a^2 \cdot \Delta_M u(M,t) + f(M,t),$$

где $\Delta_M u = div_M grad_M u(M,t)$, $a^2 = \dfrac{k}{C\cdot\rho}$,

$f(M,t) = \dfrac{F(M,t)}{C\cdot\rho}$. Если $f \equiv 0$, то уравнение называют однородным.

Через D в данном разделе будем обозначать ограниченную область в R^3 (или в R^2); $M \in D$. Через S будем обозначать границу области D; $\overline{D} = D \cup S$. Начально-краевые задачи в $\overline{D}$ для уравнения теплопроводности являются обобщением аналогичных задач с одной пространственной переменной, изменяющейся на отрезке. Рассмотрим в качестве примера первую (т.е. с краевым условием первого рода) начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде. Напомним идею метода разделения переменных для её решения.

$u_t = a^2 \cdot \Delta u + f(M,t)$, $M = M(x,y,z) \in D$, $t > 0$;

$D = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < z < l_3\} \subset Oxyz$,

где x, y, z – декартовы координаты в R^3;

$u(M,t)\big|_{M \in S} = 0$ при $t \geq 0$; $u(M,0) = \varphi(M)$ при $M \in \overline{D}$.

Замечание. Если краевое условие имеет вид $u(M,t)\big|_{M \in S} = \mu(t)$, где $\mu(t)$ не равно тождественно нулю, то заменой искомой функции можно построить аналогичную задачу с нулевым краевым условием. Такая замена искомой функции может изменить функции f и φ. Далее считаем, что искомая функция принимает нулевые значения на S.#

Решение $u(M,t)$ представим в виде суммы решений двух задач: в одной из них $f \equiv 0$, φ не равно тождественно нулю, в другой f не равна тождественно нулю, $\varphi \equiv 0$. В данном разделе рассмотрим первую из этих двух задач:

$$u_t = a^2 \cdot \Delta u,\ \ M \in D,\ \ t > 0;$$

$$u\big|_S = 0 \text{ при } t \geq 0;\ u(M,0) = \varphi(M) \text{ при } M \in \bar{D}.$$

Разделим переменные в однородном уравнении: будем искать его нетривиальные частные решения вида $u(M,t) = V(M) \cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевому условию $u\big|_S = 0$. Как и в задачах на отрезке, получаем

$$\frac{\Delta V(M)}{V(M)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = const.$$

Отсюда $T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$, т.е. $T(t) = const \cdot e^{-\lambda a^2 t}$,

и

$$\begin{cases} \Delta V(M) + \lambda V(M) = 0,\ M \in D; \\ V(M)\big|_{M \in S} = 0. \end{cases}$$

В построенной задаче Штурма-Лиувилля (относительно функции $V(M)$) тоже разделим переменные: положим $V(M) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$. Тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda = const. \qquad (1.1)$$

Поскольку дроби в равенстве (1.1) зависят лишь от одной независимой переменной, каждая из этих дробей постоянна. Из (1.1) и из краевого условия на границе параллелепипеда получаем три задачи Штурма-Лиувилля на отрезках:

$$\begin{cases} X''(x) + \alpha \cdot X(x) = 0,\ 0 < x < l_1; \\ X(0) = 0,\ X(l_1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y''(y)+\beta\cdot Y(y)=0,\, 0<y<l_2; \\ Y(0)=0,\, Y(l_2)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z''(z)+\gamma\cdot Z(z)=0,\, 0<z<l_3; \\ Z(0)=0,\, Z(l_3)=0; \end{cases}$$

причём $\lambda=\alpha+\beta+\gamma$. Решая эти три задачи на собственные значения, получаем $\alpha_m=\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2$, $X_m(x)=\sin\left(\frac{\pi m x}{l_1}\right)$; $\beta_n=\left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2$, $Y_n(y)=\sin\left(\frac{\pi n y}{l_2}\right)$; $\gamma_k=\left(\frac{\pi k}{l_3}\right)^2$, $Z_k(z)=\sin\left(\frac{\pi k z}{l_3}\right)$; здесь индексы m, n, k независимо друг от друга пробегают все натуральные числа. Итак, решение задачи Штурма-Лиувилля в прямоугольном параллелепипеде имеет вид

$$\lambda_{m,n,k}=\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{\pi k}{l_3}\right)^2,$$

$$V_{m,n,k}(M)=\sin\left(\frac{\pi m x}{l_1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n y}{l_2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi k z}{l_3}\right).$$

Замечание. Одному и тому же собственному значению λ могут отвечать несколько линейно независимых собственных функций V, если это λ даётся различными наборами (m, n, k). Приведите примеры! #

Скалярное произведение действительных функций $p(M)$ и $g(M)$, заданных на $\overline{D}$, определим выражением

$$(p,g)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} p(\xi,\eta,\zeta)\cdot g(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta .$$

Тогда для любых двух различных наборов (m, n, k) и (m', n', k') собственные функции $V_{m,n,k}$ и $V_{m',n',k'}$ ортогональны (проверьте!). Кроме того, $\left\|V_{m,n,k}\right\|^2=\dfrac{l_1 l_2 l_3}{8}$.

Получаем решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде $\overline{D}$:

$$u(M,t)=\sum_{m,n,k}\varphi_{m,n,k}\cdot V_{m,n,k}(M)\cdot\exp\left\{-\lambda_{m,n,k}\cdot a^2\cdot t\right\}, \quad (1.2)$$

где

$$\varphi_{m,n,k}=\frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\cdot V_{m,n,k}(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \quad (1.3)$$

– коэффициенты Фурье функции φ по системе функций $\left\{V_{m,n,k}\right\}$ в $\overline{D}$.

Замечание. Построенное решение $u(M,t)$ является лишь формальным. Требуется ещё доказать, что задающий его функциональный ряд удовлетворяет требованиям, предъявляемым к классическому решению. Для этого нужны некоторые предположения о функции φ. #

Замечание. Если подставить выражения (1.3) в (1.2) и поменять местами суммирование и интегрирование, то получим решение в виде

$$u(x,y,z,t)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta;t)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta .$$

Найдите функцию Грина G. #

Задача 1. Решить задачу об остывании однородного тела кубической формы, равномерно нагретого до температуры $u_0 = const$, если, начиная с момента времени $t = 0$, на его границе поддерживается нулевая температура.

Решение. $u = u(x,y,z,t)$; $Oxyz$ – декартова система координат в R^3. $u_t = a^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ в

$$D = \{0 < x < l, 0 < y < l, 0 < z < l\},\ t > 0;$$

$$u\big|_S = 0,\ t > 0;$$

$$u(x,y,z,0) = u_0 = const \text{ в } \overline{D}.$$

Разделяя переменные, находим решение задачи Штурма-Лиувилля в кубе $\overline{D}$:

$$\lambda_{m,n,k} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot (m^2 + n^2 + k^2),$$

$$V_{m,n,k}(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right).$$

Искомая температура:

$$u(M,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{m,n,k} \cdot V_{m,n,k}(M) \cdot T_{m,n,k}(t),$$

где $M = M(x,y,z)$, $\quad T_{m,n,k}(t) = \exp\{-\lambda_{m,n,k} \cdot a^2 \cdot t\}$,

$$\varphi_{m,n,k}=\frac{8}{l^3}\cdot\int_0^l\int_0^l\int_0^l u_0\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi ny}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi kz}{l}\right)dxdydz.$$

Поскольку

$$\int_0^l\sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right)dx=\frac{l}{\pi m}\cdot\left(1-(-1)^m\right)=\begin{cases}\dfrac{2l}{\pi m}, \textit{ если } m-\textit{нечётное},\\ 0, \textit{ если } m-\textit{четное},\end{cases}$$

получаем

$$u(M,t)=\frac{8u_0}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^m\right)\left(1-(-1)^n\right)\left(1-(-1)^k\right)}{mnk}\cdot$$

$$\cdot V_{m,n,k}(M)\cdot T_{m,n,k}(t)=$$

$$=\frac{64u_0}{\pi^3}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\chi=0}^{\infty}\frac{V_{2\mu+1,2\nu+1,2\chi+1}(M)\cdot T_{2\mu+1,2\nu+1,2\chi+1}(t)}{(2\mu+1)(2\nu+1)(2\chi+1)}.$$

Решение задачи не является классическим, так как начальное и краевое условие не согласованы. Очевидно, что $u(M,t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ в любой точке $M\in\overline{D}$. #

Задача 2. Решить задачу об остывании однородного шара, равномерно нагретого до температуры $u_0=const$, если, начиная с момента времени $t=0$, на его границе поддерживается нулевая температура. Радиус шара r_0.

Решение. Область $D=\{0\le r<r_0\}\subset R^3$. Задача сферически симметричная, поэтому $u(M,t)=u(r,t)$. В сферической системе координат в случае этой симметрии оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_M u(M,t) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot u)$$ (проверьте последнее тождество!).

$$u_t = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot u),\ 0 \le r < r_0,\ t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0 \text{ при } t > 0;\ u(r,0) = u_0 \text{ при } 0 \le r \le r_0.$$

Введём другую неизвестную функцию: $v(r,t) = r\cdot u(r,t)$. Умножая уравнение теплопроводности на r, получаем задачу относительно функции v:

$$v_t = a^2\cdot v_{rr},\ 0 < r < r_0,\ t > 0;$$

$$v(0,t) = 0,\ v(r_0,t) = 0 \text{ при } t > 0;\ v(r,0) = u_0\cdot r$$ при $0 \le r \le r_0$.

Условие $v(0,t) = 0$ следует из ограниченности функции $u(r,t)$: при $r \to 0+0$ произведение $r\cdot u(r,t)$ стремится к нулю.

Решая начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $0 \le r \le r_0$, получаем

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n r}{r_0}\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{r_0}\right)^2\cdot t\right\},$$

где $$\varphi_n = \frac{2}{r_0}\int_0^{r_0} u_0 r\cdot\sin\left(\frac{\pi n r}{r_0}\right)dr = \frac{2u_0 r_0}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

Искомая температура:

$$u(r,t)=\frac{2u_0r_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi nr}{r_0}\right)}{r}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}.$$

Очевидно, что $u(r,t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ в любой точке шара.

Отметим, что система функций $R_n(r)=\frac{1}{r}\cdot\sin\left(\frac{\pi nr}{r_0}\right)$ на отрезке $0\le r\le r_0$ ортогональна с весом r^2, т.е. $(R_m,R_n)=\int_0^{r_0}R_m(r)R_n(r)\cdot r^2\,dr=0$ при $m\neq n$. При этом $\|R_n\|^2=\int_0^{r_0}R_n^2(r)\cdot r^2\,dr=\frac{r_0}{2}$. Если в исходном уравнении теплопроводности относительно функции $u(r,t)$ разделить переменные r и t, т.е. искать его частные решения вида $u(r,t)=R(r)\cdot T(t)$, то придём к системе функций $\{R_n\}$. #

Задача 3. Начальная температура однородного шара радиуса r_0 задана непрерывной функцией $\varphi(r)=\frac{u_0}{r}\cdot\sin\left(\frac{\pi r}{r_0}\right)$, где r – расстояние от точки в шаре до его центра, $u_0=const$. Во все моменты времени $t\ge 0$ поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Найти температуру внутри шара при $t>0$.

Ответ: $u(r,t)=\dfrac{u_0}{r}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi r}{r_0}\right)\cdot\exp\left\{-\left(\dfrac{\pi a}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}.$

#

Задача 4. Решить задачу 3, если $\varphi(r)=u_0\cdot\sin\left(\dfrac{\pi r}{r_0}\right).$

Ответ:

$$u(r,t)=\frac{u_0 r_0}{2r}\cdot\sin\left(\frac{\pi r}{r_0}\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi a}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}-$$

$$-\frac{16u_0 r_0}{\pi^2 r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi kr}{r_0}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\left(\frac{2\pi ka}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}.\ \#$$

Очевидно, что в задачах 3 и 4 температура $u(r,t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ в любой точке шара.

Задача 5. Решить задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике: $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)$,

$$u_t=a^2\cdot\Delta_M u,\quad M\in D=\{0<x<l_1,0<y<l_2\},$$
$t>0$;

$u\big|_S=0$ при $t\ge 0$ (S – граница области D);

$$u(M,0)=u_0\cdot\sin\left(\frac{2\pi x}{l_1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right) \text{ при } M\in\overline{D};$$

$u_0=const$.

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty}u(M,t)$.

Ответ:

$$u(M,t)=u_0\cdot\sin\left(\frac{2\pi x}{l_1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{4\pi^2}{l_1^2}+\frac{\pi^2}{l_2^2}\right)\cdot a^2\cdot t\right\},$$

$u(M,t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$ в любой точке $M\in\overline{D}$.

Задача 6. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)$,

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u$ в круге $D=\{0\le x^2+y^2<r_0^2\}$, $t>0$;

$u|_S=u_0\cdot xy\cdot\sin t$ при $t\ge0$, $S=\{x^2+y^2=r_0^2\}$;

$u_0=const>0$;

$u(M,0)=u_0\cdot(r_0^2-x^2-y^2)$ при $M\in\overline{D}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u(M,t)$ на множестве $\overline{Q}=\{0\le x^2+y^2\le r_0^2,\ 0\le t\le\pi\}$.

Решение. Воспользуемся принципом наибольшего и наименьшего значений решения однородного уравнения теплопроводности. $\max\limits_{\overline{Q}}u(M,t)=u_0r_0^2$, достигается при $t=0$, $x=y=0$. $\min\limits_{\overline{Q}}u(M,t)=-\dfrac{u_0}{2}\cdot r_0^2$, достигается при $t=\dfrac{\pi}{2}$ в двух точках окружности S:

$$M_1\left(\frac{\sqrt{2}r_0}{2},-\frac{\sqrt{2}r_0}{2}\right) \text{ и } M_2\left(-\frac{\sqrt{2}r_0}{2},\frac{\sqrt{2}r_0}{2}\right).\#$$

Задача 7. $u = u(M,t)$, $M = M(x,y)$,
$u_t = \Delta_M u$ в $D = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$, $t > 0$;
$u_x(0,y,t) = u_x(\pi,y,t) = u_y(x,0,t) = u_y(x,\pi,t) = 0$ при $t \geq 0$ на границе S квадрата D;
$u(M,0) = u_0 \cdot (2 + \cos x + \cos y)$ при $M \in \overline{D}$;
$u_0 = const$.
Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(M,t)$.

Решение. Граница S квадрата D теплоизолирована. Источников или стоков теплоты в $\overline{D}$ нет. При $t \to +\infty$ в $\overline{D}$ установится постоянная стационарная температура: $\lim\limits_{t\to+\infty} u(M,t) = c = const$. Найдём величину $c = const$:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi c\,dx\,dy = \pi^2 \cdot c = \int_0^\pi\int_0^\pi u_0 \cdot (2 + \cos x + \cos y)dx\,dy = 2\pi^2 \cdot u_0.$$

Отсюда $c = 2u_0$. Проверьте полученный ответ, решая задачу методом разделения переменных.#

Задачи для самостоятельного решения.

1.1.1. Решить начально-краевую задачу в шаре:
$u_t = \Delta_M u(M,t)$, $M \in D = \{0 \leq r < 5\} \subset R^3$, $t > 0$;
$u\big|_{r=5} = 3$ при $t > 0$; $u(M,0) = 1$ при $M \in \overline{D}$.

1.1.2. Найти распределение температуры в тонкой квадратной пластинке $\overline{D}=\{0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$, если её граница поддерживается при нулевой температуре, а её начальная температура $u(M,0)=u_0\cdot\sin x\cdot\sin(3y)$; $u_0=const$.

1.1.3. Найти распределение температуры в тонкой квадратной пластинке $\overline{D}=\{0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$, если её граница теплоизолирована, а её начальная температура $u(M,0)=u_0\cdot\cos x\cdot\cos(7y)$; $u_0=const$.

1.1.4. Тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда: $\overline{D}=\{0\le x\le l_1, 0\le y\le l_2, 0\le z\le l_3\}$. Его грани $y=0$ и $z=l_3$ поддерживаются при нулевой температуре, а остальные грани теплоизолированы. Начальная температура тела равна $u_0\cdot\dfrac{xyz}{l_1l_2l_3}$, $u_0=const$. Найти температуру тела во все моменты времени $t>0$. Найти её предельное распределение при $t\to+\infty$.

1.1.5. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)$,

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u$ в круге $D=\{0\le x^2+y^2<r_0^2\}$, $t>0$;

$u|_S=-u_0\cdot xy\cdot\sin t$ при $t\ge0$, $\quad S=\{x^2+y^2=r_0^2\}$;

$u_0=const>0$;

$u(M,0)=u_0\cdot(x^2+y^2-r_0^2)$ при $M\in\overline{D}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u(M,t)$ на множестве $\overline{Q}=\{0\le x^2+y^2\le r_0^2, 0\le t\le\pi\}$.

1.2. Задачи для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующие применения цилиндрических функций. Уравнение Бесселя, свойства цилиндрических функций.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности в бесконечном круговом цилиндре. Вновь будем считать, что искомая температура принимает нулевые значения на поверхности цилиндра (этого можно добиться заменой искомой функции; см.раздел 1.1.). Пусть ось цилиндра совпадает с осью Oz, а подлежащая определению температура не зависит от координаты z. Тогда получаем начально-краевую задачу на основании цилиндра – в круге $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ (r, φ – полярные координаты на плоскости Oxy):

$u_t = a^2 \cdot \Delta u$ в D при $t > 0$; $u = u(M, t)$, $M = M(r, \varphi) \in D$;

$u\big|_{r=r_0} = 0$ при $t > 0$; $u(M, 0) = p(M)$ при $M \in \overline{D}$.

Разделим пространственные переменные r, φ и время t в однородном уравнении теплопроводности: будем искать его нетривиальные частные решения вида $u(r, \varphi, t) = V(r, \varphi) \cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевому условию $u\big|_S = 0$, где S – граница круга $\overline{D}$. Тогда получим уравнение $T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$ и задачу Штурма-Лиувилля в круге:

$$\begin{cases} \Delta V(M) + \lambda V(M) \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda V = 0, \\ M \in D; \quad V(M)\big|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $\left|V(0,\varphi)\right| < \infty$, и что можно допускать любые действительные значения переменной φ, если считать $V(r,\varphi) = V(r,\varphi + 2\pi)$. В задаче Штурма-Лиувилля тоже разделим переменные: положим $V(M) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$; тогда

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\cdot\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\cdot R(r) + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Последнее равенство умножим на r^2 и разделим на $R(r)\cdot\Phi(\varphi)$; это позволяет разделить переменные r и φ:

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda R\right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \delta = const \qquad (2.1)$$

Задача на собственные значения

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \delta\cdot\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

имеет нетривиальные 2π – периодические решения только при $\delta = \delta_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; собственным значениям δ_n соответствуют линейно независимые собственные функции $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$ (значению $\delta_0 = 0$ отвечает 1).

Умножая на $R(r)$ и деля на r^2 в (2.1), получаем при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ краевую задачу для определения собственных функций $R(r)$ и собственных значений λ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{r^2}\right) \cdot R = 0, \quad 0 \le r \le r_0; \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

В уравнении (2.2) выполним замену переменных: положим $q = \sqrt{\lambda} r$ (здесь $\lambda > 0$) и введём функцию $w(q) = R\left(\dfrac{q}{\sqrt{\lambda}}\right) = R(r)$. Тогда $R'_r = \sqrt{\lambda} \cdot w'_q$, $r \cdot R'_r = q \cdot w'_q$, $\left(r \cdot R'_r\right)'_r = \sqrt{\lambda} \cdot \left(w'_q + q \cdot w''_{qq}\right)$ (проверьте!). Умножая уравнение (2.2) на r^2, приходим к уравнению

$$q^2 \cdot w''_{qq} + q \cdot w'_q + \left(q^2 - n^2\right) \cdot w = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называют уравнением Бесселя с целым индексом n, а его решения – цилиндрическими функциями.

Уравнение Бесселя изучается в курсе "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Некоторые свойства его решений приводятся ниже в дополнении к данному разделу. Сейчас же вернёмся к построению решения исходной задачи для уравнения теплопроводности.

Ищем решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию $|w(0)| = |R(0)| < \infty$. Ограниченное в нуле решение уравнения Бесселя называют функцией Бесселя или цилиндрической функцией 1-го рода; обозначение: $J_n(q)$. Из краевого условия $R(r_0)=0$ теперь можно найти собственные значения λ: они являются корнями уравнения $J_n\left(\sqrt{\lambda}r_0\right)=0$. Уравнение $J_n(q)=0$ имеет бесконечное (счетное) число положительных корней; их обозначают через $\mu_k^{(n)}$, $k=1, 2, \ldots$. Поэтому $\lambda_k^{(n)}=\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$. Итак, при каждом фиксированном n задаче (2.2) удовлетворяют функции $R_{n,k}(r)=J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\cdot r\right)$; $k=1, 2, \ldots$; здесь $n=0, 1, 2, \ldots$.

При $n=0$ и $k=1, 2, \ldots$ мы нашли собственные функции задачи Штурма-Лиувилля в круге: $V_{0,k}(r,\varphi)=J_0\left(\dfrac{\mu_k^{(0)}}{r_0}\cdot r\right)$; они не зависят от полярного угла φ. При $n=1, 2, \ldots$, $k=1, 2, \ldots$ каждому набору индексов n, k соответствуют две линейно независимые собственные функции $V_{n,k}^{(c)}(r,\varphi)=J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\cos(n\varphi)$,

$$V_{n,k}^{(s)}(r,\varphi)=J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\sin(n\varphi).$$

Решение первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в круге $\overline{D}$ надо искать в виде

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}\cdot r\right)\cdot A_{0,k}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}\right)^2 a^2 t\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\cdot r\right)\left(A_{n,k}\cdot\cos(n\varphi)+B_{n,k}\cdot\sin(n\varphi)\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}.$$

Коэффициенты $A_{n,k}$ и $B_{n,k}$ можно найти из начального условия $u(r,\varphi,0)=p(r,\varphi)$ в $\overline{D}$. Для этого надо ввести скалярное произведение функций $p=p(r,\varphi)$ и $g=g(r,\varphi)$, заданных в $\overline{D}$, по формуле

$$(p,g)=\iint\limits_{D}p(M)g(M)dD_M=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}p(r,\varphi)g(r,\varphi)\cdot r\,dr,$$

доказать ортогональность (с весом r) системы всех собственных функций $\{V_{n,k}(M)\}$ и найти $\|V_{n,k}\|^2$. Тогда можно будет построить ряд Фурье функции $p(M)$ по системе $\{V_{n,k}(M)\}$ и найти коэффициенты $A_{n,k}$ и $B_{n,k}$.

Дополнение.

Данное дополнение содержит справочный материал об уравнении Бесселя и о некоторых свойствах цилиндрических функций. Этот материал не связан с рассмотренной выше задачей для уравнения теплопроводности, поэтому мы изменим обозначения: независимую переменную в уравнении Бесселя обозначим через x, а искомую функцию – через $y(x)$.

Уравнение Бесселя индекса ν имеет вид

$$x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) + (x^2 - \nu^2) \cdot y(x) = 0. \qquad (2.4)$$

Здесь ν – не обязательно целое число, $\nu \in R$. Мы рассматриваем ν как фиксированное значение параметра и ищем решения уравнения (2.4) при этом фиксированном значении. Если разделить (2.4) на x, то уравнение Бесселя можно записать в самосопряжённой форме:

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) \cdot y(x) = 0.$$

Функции Бесселя (цилиндрические функции 1-го рода) можно искать в виде обобщённого степенного ряда:

$y(x) = x^\delta \cdot (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots)$, $a_0 \neq 0$. Подставляя это выражение в (2.4), нетрудно найти δ и все коэффициенты a_i.

Так получают функцию Бесселя порядка ν:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(k+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad (2.5)$$

где Γ – гамма-функция (напомним, что $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$).

Пусть ν не является целым числом. Тогда функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы; они характеризуются различными поведениями в окрестности точки $x = 0$. В этом случае общее решение уравнения Бесселя можно записать в виде $y_\nu(x) = c_1(\nu) \cdot J_\nu(x) + c_2(\nu) \cdot J_{-\nu}(x)$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Пусть теперь ν – целое число: $\nu = n \in Z$. Тогда $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$. Поэтому необходимо найти другую цилиндрическую функцию порядка $\nu = n$. линейно независимую с функцией $J_n(x)$. Для этого введём функцию Неймана (цилиндрическую функцию 2-го рода). При $\nu \notin Z$ функция Неймана определяется формулой

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)}\left[J_\nu(x)\cdot\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)\right],$$

а при $n \in Z$ функция Неймана определяется как $N_n(x) = \lim\limits_{\nu\to n} N_\nu(x)$.

При любых $\nu \in R$ функции $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ линейно независимы. Поэтому общее решение уравнения Бесселя можно записать в виде $y_\nu(x) = c_1(\nu)\cdot J_\nu(x) + c_2(\nu)\cdot N_\nu(x)$.

Если $\nu \geq 0$, то функция Бесселя ограничена в окрестности точки $x = 0$, а функция Неймана не ограничена в окрестности этой точки.

Функции Бесселя и Неймана удовлетворяют некоторым рекуррентным формулам. Так, записывая $J_\nu(x)$ в виде обобщённого степенного ряда (2.5), легко получить формулы

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu\cdot J_\nu(x)\right) = x^\nu\cdot J_{\nu-1}(x). \qquad (2.7)$$

(Докажите формулы (2.6) и (2.7)!) Формулы (2.6) и (2.7) часто используют при вычислении интегралов, содержащих функции Бесселя в подынтегральном выражении. Из (2.6) и (2.7) вытекает рекуррентная формула

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}\cdot J_\nu(x) \qquad (2.8)$$

(докажите формулу (2.8)!). Из определения функций Неймана и формул (2.6) – (2.8) следует рекуррентная формула

$$N_{\nu+1}(x)+N_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}\cdot N_{\nu}(x). \qquad (2.9)$$

Если $\nu = n \in N$, то по формулам (2.8) и (2.9) можно последовательно выразить функции $J_n(x)$ и $N_n(x)$ соответственно через $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $N_0(x)$, $N_1(x)$.

Функции Бесселя вида $J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ обладают свойством ортогональности с весом x на интервале $0 < x < l$. Именно, справедлива следующая теорема (см.[2,3]).

Теорема об ортогональности. Пусть $\nu > -1$. Пусть положительные числа α и β являются корнями уравнения $J_\nu(\mu) = 0$, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда

$$\int_0^l J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}\cdot x\right)\cdot J_\nu\left(\frac{\beta}{l}\cdot x\right)\cdot x\,dx = 0.$$

Аналогичная теорема справедлива и в случае уравнения $J_\nu'(\mu) = 0$ (см.[1-3]).

В смысле скалярного произведения с весом x нетрудно найти евклидову норму функции вида $J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)$. Именно (см.[1,3]), если $J_\nu(\mu) = 0$, где $\mu > 0$, то

$$\left\|J_\nu\left(\frac{\mu}{l}\cdot x\right)\right\|^2 = \int_0^l\left(J_\nu\left(\frac{\mu}{l}\cdot x\right)\right)^2\cdot x\,dx =$$

$$=\frac{l^2}{2}\left[J_\nu'(\mu)\right]^2 = \frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\mu)\right]^2.$$

Нули всякой цилиндрической функции простые, кроме, быть может, точки $\mu = 0$. При $\nu \in R$ у всякой функции J_ν и у всякой функции N_ν имеется бесконечное (счетное) множество нулей. При $\nu > -1$ все корни уравнения $J_\nu(\mu) = 0$ действительные; они симметрично расположены относительно точки $\mu = 0$ и не имеют конечных предельных точек. Будем обозначать положительные корни этого уравнения через $\mu_k^{(\nu)}$, $k = 1, 2, \ldots$: $\mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \ldots$.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $0 < x < l$. Построим её коэффициенты Фурье c_k по ортогональной системе функций $\left\{J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{l} \cdot x\right)\right\}$ (здесь ν фиксировано, $k = 1, 2, \ldots$):

$$c_k = \frac{1}{\left\|J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{l} \cdot x\right)\right\|^2} \cdot \int_0^l f(x) \cdot J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{l} \cdot x\right) \cdot x\,dx.$$

Тем самым функции $f(x)$ ставится в соответствие её ряд Фурье-Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{l} \cdot x\right)$. При определённых предположениях о функции $f(x)$ можно доказать поточечную сходимость этого ряда на интервале $0 < x < l$ или его равномерную сходимость к $f(x)$ на всём отрезке $0 \le x \le l$ и т.д. (см.[3]). #

Задача 1. Построить ряд Фурье-Бесселя функции $f(x) = 1 - x$ на интервале $0 < x < 1$ по системе функций $J_0\left(\mu_1^{(0)}x\right), J_0\left(\mu_2^{(0)}x\right), \ldots, J_0\left(\mu_k^{(0)}x\right), \ldots,$ где

$\mu_1^{(0)} < \mu_2^{(0)} < \ldots < \mu_k^{(0)} < \ldots$ – положительные нули функции $J_0(\mu)$.

Решение. Найдем коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int_0^1 (1-x) \cdot J_0\left(\mu_k^{(0)} x\right) \cdot x\,dx .$$

Будем дальше опускать верхний индекс в записи $\mu_k^{(0)}$. В интеграле выполним замену переменной интегрирования: $z = \mu_k \cdot x$; тогда интеграл примет вид

$$\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^{\mu_k} z \cdot J_0(z)dz - \frac{1}{\mu_k^3} \int_0^{\mu_k} z^2 \cdot J_0(z)dz .$$

Используем формулы (см.(2.7))

$$\frac{d}{dz}\left[z \cdot J_1(z)\right] = z \cdot J_0(z), \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z). \tag{2.11}$$

Из (2.10) следует $\int_0^{\mu_k} z \cdot J_0(z)dz = \mu_k \cdot J_1(\mu_k)$. Второй интеграл вычисляем двукратным интегрированием по частям, применяя формулы (2.10) и (2.11):

$$\int_0^{\mu_k} z^2 \cdot J_0(z)dz = \mu_k^2 \cdot J_1(\mu_k) - \int_0^{\mu_k} J_0(z)dz .$$

Итак, $\int_0^1 (1-x) \cdot J_0(\mu_k x) \cdot x\,dx = \frac{1}{\mu_k^3} \int_0^{\mu_k} J_0(z)dz$.

Последний интеграл от функции $J_0(z)$ можно вычислить лишь приближенно, используя разложение $J_0(z)$ в степенной ряд (2.5).

Получили ряд Фурье-Бесселя функции $f(x)=1-x$ на интервале $0<x<1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^3\cdot\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot\int_0^{\mu_k}J_0(z)dz\cdot J_0\left(\mu_k^{(0)}x\right).$$

Вопрос о сходимости этого функционального ряда требует отдельного изучения. #

Задача 2. Решить начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности в круге $\overline{D}=\{0\le r\le r_0, 0\le\varphi<2\pi\}$:

$u_t=a^2\cdot\Delta u$ в D при $t>0$; $u=u(M,t)$, $M=M(r,\varphi)$;

$u\big|_{r=r_0}=0$ при $t>0$; $u(M,0)=r^2\cdot\cos(2\varphi)$ при $M\in\overline{D}$.

(Поскольку $u(M,t)$ имеет смысл температуры, начальное условие следовало бы записать в виде $u(M,0)=u_0\cdot r^2\cdot\cos(2\varphi)$, где постоянная u_0 имеет нужную размерность. Для упрощения формул здесь и далее мы опускаем такие постоянные.)

Решение. Выше было подробно описано построение решения $u(M,t)$ в виде функционального ряда методом разделения переменных.

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\left(A_{n,k}\cos(n\varphi)+B_{n,k}\sin(n\varphi)\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\lambda_k^{(n)}\cdot a^2\cdot t\right\},$$

где $\lambda_k^{(n)}$ определяются из уравнения $J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r_0\right)=0$, т.е.

$$\lambda_k^{(n)}=\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2.$$

Коэффициенты $A_{n,k}$ и $B_{n,k}$ найдем из начального условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\left(A_{n,k}\cdot\cos(n\varphi)+B_{n,k}\cdot\sin(n\varphi)\right)=r^2\cdot\cos(2\varphi).$$

Очевидно, что $B_{n,k}=0$ при всех $n=0,1,2,\ldots$ и при всех $k=1,2,\ldots$. Очевидно, что $A_{n,k}=0$ при $n\neq 2$ и при всех $k=1,2,\ldots$. Разложим функцию r^2 на отрезке $0\le r\le r_0$ в ряд Фурье-Бесселя по системе функций $\left\{J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда

$A_{2,k}=\left\|J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right)\right\|^{-2}\cdot\int_0^{r_0}J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right)\cdot r^2\cdot r\,dr$. Для вычисления последнего интеграла выполним замену переменной интегрирования: $z=\sqrt{\lambda_k^{(2)}}\cdot r$; используя формулу (2.7) при $\nu=3$, получаем $\int_0^{r_0}J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right)\cdot r^3\,dr=\frac{r_0^3}{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}}\cdot J_3\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r_0\right)$. Поскольку

$\mu_k^{(2)}=\sqrt{\lambda_k^{(2)}}\cdot r_0$, имеем $\left\|J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right)\right\|^2=\frac{r_0^2}{2}\left[J_3\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r_0\right)\right]^2$.

Тем самым найдены коэффициенты $A_{2,k}$, и можно записать ответ:

$$u(r,\varphi,t) = 2r_0 \cdot \cos(2\varphi) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right)}{\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \cdot J_3\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r_0\right)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\lambda_k^{(2)} \cdot a^2 \cdot t\right\}.$$

Однако, это лишь формальный ответ. Требуется ещё обосновать сходимость построенного функционального ряда и непрерывность его суммы в круге $\overline{D}$ при $t > 0$ и возможность почленного его дифференцирования. Отметим, что решение данной начально-краевой задачи не является классическим, т.к. нет согласования начального и краевого условий. #

Задача 3. $u = u(M,t)$,

$M = M(r,\varphi) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

$u_t = a^2 \cdot \Delta u$ в D при $t > 0$;

$$u\big|_{r=r_0} = 0 \text{ при } \quad t > 0; \qquad u(M,0) = J_0\left(\frac{\mu_5^{(0)}}{r_0} r\right),$$

$M \in \overline{D}$.

Решение. Функцию $u(M,t)$ надо искать в виде ряда, к которому приводит метод разделения переменных. Поскольку начальное условие не зависит от переменной φ, очевидно, что при $n \ne 0$ все коэффициенты $A_{n,k} = 0$ и все $B_{n,k} = 0$. Решение имеет вид

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) \cdot A_{0,k} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}\right)^2 \cdot a^2 \cdot t\right\}.$$

Из начального условия ясно, что при $k \ne 5$ все коэффициенты $A_{0,k} = 0$. Итак решение не зависит от полярного угла φ и имеет вид

$$u(M,t) \equiv u(r,t) = J_0\left(\frac{\mu_5^{(0)}}{r_0} r\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\mu_5^{(0)}}{r_0}\right)^2 \cdot a^2 \cdot t\right\}.$$

Задача 4. $u = u(M,t)$,

$M = M(r,\varphi) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\}$.

$u_t = a^2 \cdot \Delta u$ в D при $t > 0$;

$u\big|_{r=r_0} = 0$ при $t > 0$; $u(M,0) = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ при $M \in \overline{D}$.

Решение. Из начального условия ясно, что решение задачи не зависит от переменной φ, его надо искать в виде такого же ряда, как в задаче 3. Коэффициенты $A_{0,k}$ найдем из начального условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2,$$

т.е. эти коэффициенты являются коэффициентами Фурье функции $1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ на интервале $0 < r < r_0$ по системе функций $\left\{J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$A_{0,k} = \frac{2}{r_0^2} \cdot \left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^{-2} \cdot \int_0^{r_0} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) \cdot r\,dr.$$

Полагая $z = \dfrac{r}{r_0}$, последний интеграл запишем в виде $r_0^2 \cdot \int_0^1 \left(1 - z^2\right) \cdot J_0\left(\mu_k^{(0)} z\right) \cdot z\,dz$. Интегрируя по частям и пользуясь формулами (2.7) и (2.8), находим полученный интеграл по z.

Ответ:

$$u(M,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 J_0\left(\dfrac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right)}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^3 \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}\right)^2 \cdot a^2 \cdot t\right\}. \#$$

Задача 5. $u = u(M,t)$, $M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D}$, где $\overline{D}$ – цилиндр высоты h:
$\overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le h\}$.

$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u$ в D при $t > 0$;

$u\big|_{r=r_0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$ при $t > 0$;

$u(M,0) = J_2\left(\dfrac{\mu_2^{(2)}}{r_0} r\right) \cdot \cos(2\varphi) \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi z}{h}\right)$ при $M \in \overline{D}$.

(Данная начально-краевая задача описывает остывание круглого цилиндра высоты h, торцы которого теплоизолированы.)

Указание. Разделяя переменные, докажите, что решение надо искать в виде

$$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{-\chi_{m,n,k}\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot\cos\frac{\pi mz}{h}\cdot$$

$$\cdot J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\left(A_{m,n,k}\cdot\cos(n\varphi)+B_{m,n,k}\cdot\sin(n\varphi)\right),$$

где $\chi_{m,n,k}=\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2+\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$. Для заданного начального условия

$$u(M,t)=\exp\left\{-\left[\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\mu_2^{(2)}}{r_0}\right)^2\right]\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot$$

$$\cdot J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)}}{r_0}r\right)\cdot\cos(2\varphi)\cdot\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right).\#$$

Задача 6. $u=u(M,t)$, $M=M(r,\varphi,z)\in\overline{D}$, где $\overline{D}$ – цилиндр высоты h:

$$\overline{D}=\left\{0\le r\le r_0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le z\le h\right\}.$$

$u_t=a^2\cdot\Delta u$ в D при $t>0$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h}=0 \text{ при } t>0;$$

$$u(M,0)=p(M)=J_2\left(\frac{\zeta_2^{(2)}}{r_0}r\right)\cdot\cos\frac{2\pi z}{h}\cdot\cos(2\varphi),$$

где $\zeta_2^{(2)}$ – положительный корень уравнения $J_2'(\zeta)=0$, $M\in\overline{D}$.

Решение. Данная начально-краевая задача с краевым условием **второго** рода описывает изменение температуры круглого цилиндра высоты h, вся поверхность которого теплоизолирована. Задачи с таким краевым условием на боковой поверхности цилиндра в данном разделе не рассматривались, поэтому проведем рассуждения метода разделения переменных заново.

Разделим пространственные переменные r,φ,z и время t в однородном уравнении теплопроводности: будем искать его нетривиальные частные решения вида $u(r,\varphi,z,t)=U(r,\varphi,z)\cdot T(t)$, которые удовлетворяют поставленным в задаче краевым условиям второго рода на всей поверхности цилиндра. Тогда получим уравнение $T'(t)+a^2\chi T(t)=0$ и задачу Штурма-Лиувилля в цилиндре:

$$\begin{cases}\Delta U(M)+\chi U(M)\equiv\\ \equiv\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\chi U=0,\ M\in D;\\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=h}=0;\quad \chi=const.\end{cases}$$

Разделим переменные r, φ и z: положим $U(M) = V(r,\varphi)\cdot Z(z)$; тогда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)\cdot Z + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\cdot Z + V\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \chi\cdot V\cdot Z = 0.$$

Деля последнее равенство на $V\cdot Z$, получим

$$\frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}}{V(r,\varphi)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\chi = const.$$

Здесь первая и вторая дроби принимают некоторые постоянные значения $(-\lambda)$ и $(-\gamma)$ соответственно; $\lambda + \gamma = \chi$.

Пусть сначала $\chi \neq 0$. Заметим, что $|V(0,\varphi)| < \infty$, и что можно допускать любые действительные значения переменной φ, если считать $V(r,\varphi) = V(r,\varphi + 2\pi)$. Получили задачи Штурма-Лиувилля в круге и на отрезке:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda\cdot V(r,\varphi) = 0, \\ 0 \le r < r_0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \\ |V(0,\varphi)| < \infty, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0; \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} Z''(z) + \gamma\cdot Z(z) = 0, \quad 0 \le z \le h; \\ Z'(0) = 0, \quad Z'(h) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Задача (2.13) имеет решение $\gamma_0 = 0$, $Z_0(z) \equiv 1$; $\gamma_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2$, $Z_m(z) = \cos\frac{\pi m z}{h}$ при $m = 1, 2, \ldots$.

В задаче (2.12) снова разделим переменные: положим $V(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. Тогда приходим к задачам на собственные значения относительно функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$ (см. (2.1)).

Задача на собственные значения

$$\Phi''(\varphi) + \delta\cdot\Phi(\varphi) = 0,\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

имеет решение $\delta_0 = 0$, $\Phi_0(\varphi) \equiv 1$; $\delta_n = n^2$, $\Phi_n^{(c)}(\varphi) = \cos(n\varphi)$, $\Phi_n^{(s)}(\varphi) = \sin(n\varphi)$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Повторяя вывод уравнения (2.2), при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем краевую задачу для определения собственных функций $R(r)$ и собственных значений λ:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)\cdot R = 0, \quad 0 \le r \le r_0; \\ |R(0)| < \infty, \quad \left.\frac{dR(r)}{dr}\right|_{r=r_0} = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Замена $q = \sqrt{\lambda}r$, $w(q) = R\left(\frac{q}{\sqrt{\lambda}}\right)$ приводит уравнение в задаче (2.14) к уравнению Бесселя (2.3). Краевое условие $|R(0)| < \infty$ выделяет среди всех решений уравнения (2.3) функции Бесселя $J_n(q)$, а краевое условие при $r = r_0$ позволяет найти собственные значения λ: они являются корнями уравнения $J_n'\left(\sqrt{\lambda}r_0\right)=0$.

Обозначим через $\zeta_k^{(n)}$ положительные корни уравнения $J_n'(\zeta)=0$: $\zeta_1^{(n)}<\zeta_2^{(n)}<\ldots$. Тогда $\lambda_k^{(n)}=\left(\dfrac{\zeta_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$. Итак, при каждом фиксированном n задаче (2.14) удовлетворяют функции $R_{n,k}(r)=J_n\left(\dfrac{\zeta_k^{(n)}}{r_0}r\right)$, $k=1,2,\ldots$; здесь $n=0,1,2,\ldots$

Отсюда имеем $V_{0,k}(r,\varphi)=J_0\left(\dfrac{\zeta_k^{(0)}}{r_0}r\right)$, $k=1,2,\ldots$; а при $n=1,2,\ldots$, $k=1,2,\ldots$ каждому набору индексов n, k соответствуют собственные функции $V_{n,k}^{(c)}(r,\varphi)=J_n\left(\dfrac{\zeta_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\cos(n\varphi)$ и $V_{n,k}^{(s)}(r,\varphi)=J_n\left(\dfrac{\zeta_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\sin(n\varphi)$.

Пусть теперь $\chi=0$. Тогда задача (2.13) может иметь решение только при $\gamma=0$ (это решение $Z(z)\equiv 1$), а задача (2.12) – только при $\lambda=0$. В этом случае в (2.14) уравнение примет вид

$$r^2\cdot R''(r)+r\cdot R'(r)-n^2\cdot R(r)=0. \qquad (2.15)$$

При $n=1,2,\ldots$ уравнение Эйлера (2.15) имеет линейно независимые решения r^n и r^{-n}, которые не удовлетворяют краевым условиям задачи (2.14). При $n = 0$ уравнение (2.15) имеет линейно независимые решения $R(r) \equiv 1$ и $R(r) = \ln r$; из них только $R(r) \equiv 1$ удовлетворяет обоим краевым условиям в (2.14).

Теперь можно записать систему собственных функций для цилиндра $\overline{D}$ высоты h: $U(M) \equiv 1$ и

$$U^{(c)}_{m,n,k}(M) = \cos\left(\frac{\pi m z}{h}\right) \cdot J_n\left(\frac{\zeta^{(n)}_k}{r_0} r\right) \cdot \cos(n\varphi),$$

$$U^{(s)}_{m,n,k}(M) = \cos\left(\frac{\pi m z}{h}\right) \cdot J_n\left(\frac{\zeta^{(n)}_k}{r_0} r\right) \cdot \sin(n\varphi)$$

при $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ (при $n = 0$ нет $U^{(s)}_{m,0,k}$).

Решение исходной задачи для уравнения теплопроводности надо искать в виде следующего ряда:

$$u(M,t) = C + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{-\chi_{m,n,k} \cdot a^2 \cdot t\right\} \cdot$$
$$\cdot \left(A_{m,n,k} \cdot U^{(c)}_{m,n,k}(M) + B_{m,n,k} \cdot U^{(s)}_{m,n,k}(M)\right),$$

где $C = const$, $\chi_{m,n,k} = \gamma_m + \lambda^{(n)}_k$. Постоянную C и коэффициенты $A_{m,n,k}$ и $B_{m,n,k}$ можно найти из начального условия. Для этого надо ввести скалярное произведение функций $p = p(M)$ и $g = g(M)$, заданных в $\overline{D}$, по формуле

$$(p, g) = \iiint\limits_{\overline{D}} p(M) \cdot g(M) dD_M .$$

При вычислении $\left\| U^{(c),(s)}_{m,n,k} \right\|^2$ надо учесть, что

$$\int_0^{r_0}\left(J_n\left(\frac{\zeta_k^{(n)}}{r_0}r\right)\right)^2\cdot r\,dr=\frac{r_0^2}{2}\left[1-\left(\frac{n}{\zeta_k^{(n)}}\right)^2\right]\cdot\left(J_n\left(\zeta_k^{(n)}\right)\right)^2$$

(см.[1-3]).

Для решения исходной задачи с заданным начальным условием нет необходимости раскладывать $p(M)$ в ряд Фурье в цилиндре $\overline{D}$. Из этого начального условия ясно, что $A_{2,2,2}=1$, а все остальные коэффициенты A и B равны нулю, $C=0$.

Ответ:

$$u(M,t)=\exp\left\{-\left[\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\zeta_2^{(2)}}{r_0}\right)^2\right]\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot$$

$$\cdot J_2\left(\frac{\zeta_2^{(2)}}{r_0}r\right)\cos(2\varphi)\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right).$$

Заметьте, что в данной задаче $\lim\limits_{t\to+\infty}u(M,t)=0$, т.к. в начальный момент времени средняя температура цилиндра была равна 0. #

Задачи для самостоятельного решения.

1.2.1. Выразить функцию Бесселя $J_3(x)$ через функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$. Выразить функцию Неймана $N_3(x)$ через функции $N_0(x)$ и $N_1(x)$.

1.2.2. Найти функции Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. (Указание. Используйте обобщенный степенной ряд (2.5) и свойства гамма-функции:

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^n}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.)

1.2.3. Построить график функции Бесселя $J_0(x)$ при $0\le x\le 1$. (Указание. Используйте ряд (2.5).)

1.2.4. Доказать, что $\frac{d}{dx}J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left[J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)\right]$.

(Указание. Используйте формулы (2.6) и (2.7).)

1.2.5. Доказать, что $\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$.

1.2.6. Доказать, что если $J_\nu(\mu)=0$, то

$\left.\frac{d}{dx}J_\nu(x)\right|_{x=\mu}=-J_{\nu+1}(\mu)$. (Указание. Исходя из (2.6), докажите формулу $\frac{d}{dx}J_\nu(x)=\frac{\nu}{x}\cdot J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$.)

1.2.7. Построить ряд Фурье-Бесселя функции $f(x)=1-x^2$ на интервале $0<x<1$ по системе функций $\left\{J_0\left(\mu_k^{(0)}x\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$, где $\mu_k^{(0)}$ – положительные нули функции $J_0(\mu)$.

1.2.8. $u=u(M,t)$,

$M=M(r,\varphi,z)\in\overline{D}=\{0\le r\le r_0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<z<+\infty\}$;

$$u_t=\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t>0;$$

$$\left.u\right|_{r=r_0}=0 \text{ при } t\ge 0; \qquad u(M,0)=J_0\left(\frac{\mu_5^{(2)}}{r_0}r\right) \text{ при}$$

$M\in\overline{D}$.

1.2.9. $u = u(M,t)$,

$M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, -\infty < z < +\infty\}$;

$$u_t = \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = 1 \text{ при } t \ge 0; \quad u(M,0) = 0 \text{ при } M \in \overline{D}.$$

1.2.10. $u = u(M,t)$,

$M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, -\infty < z < +\infty\}$;

$$u_t = \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0 \text{ при } t > 0; \quad u(M,0) = \left(\frac{r}{r_0}\right) \cdot \cos\varphi \text{ при}$$

$M \in \overline{D}$.

1.2.11. $u = u(M,t)$, $M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D}$, где $\overline{D}$ – цилиндр высоты h: $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 \le z \le h\}$;

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0,\ u\big|_{z=0} = 0,\ u\big|_{z=h} = 0 \text{ при } t > 0;$$

$$u(M,0) = \left(\frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(\frac{z}{h}\right) \cdot \sin\varphi \text{ при } M \in \overline{D}.$$

1.2.12. $u = u(M,t)$,

$M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 \le z \le h\}$;

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0,\ u\big|_{z=0} = 0,\ u\big|_{z=h} = 0 \text{ при } t > 0;$$

$$u(M,0) = J_0\left(\frac{\mu_7^{(0)}}{r_0} r\right) \cdot \sin\frac{7\pi z}{h} \text{ при } M \in \overline{D}.$$

1.2.13. $u = u(M,t)$,
$M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le h\}$;

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0,\ u\big|_{z=0} = 0,\ u\big|_{z=h} = 0 \quad \text{при } t > 0;$$

$$u(M,0) = J_7\left(\frac{\zeta_1^{(7)}}{r_0} r\right) \cdot \sin\frac{\pi z}{h} \cdot \sin(7\varphi) \quad \text{при}$$

$M \in \overline{D}$, где $\zeta_1^{(7)}$ – наименьший положительный нуль функции $J_7'(\zeta)$.

1.2.14. $u = u(M,t)$,
$M = M(r,\varphi,z) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le h\}$;

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0 \quad \text{при } t > 0;$$

$$u(M,0) = 1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cdot \cos(2\varphi) \cdot \cos\frac{\pi z}{h} \text{ при } M \in \overline{D}.$$

1.3. Задачи для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующие применения сферических функций. Многочлены Лежандра, присоединённые функции Лежандра, сферические функции.

Для изучения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в шаре введём в пространстве $Oxyz$ сферическую систему координат: $r \ge 0$,

$0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$,

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = r \cdot \cos\theta. \end{cases}$$

Пусть $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi\}$, $u = u(M,t)$, $M = M(r,\theta,\varphi) \in \overline{D}$;

$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u$ в D (т.е. при $0 \le r < r_0$) при $t > 0$;

$u\big|_{r=r_0} = 0$ при $t > 0$; $u(M,0) = p(M)$ при $M \in \overline{D}$.

Разделим пространственные переменные r, θ, φ и время t в однородном уравнении теплопроводности: будем искать его нетривиальные частные решения вида $u(r,\theta,\varphi,t) = V(r,\theta,\varphi) \cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевому условию $u\big|_S = 0$, где S – граница шара $\overline{D}$. Тогда получим уравнение $T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0$ и задачу Штурма-Лиувилля в шаре:

$$\begin{cases} \Delta_{r,\theta,\varphi} V(M) + \lambda V(M) = 0, \quad M \in D; \\ V(M)\big|_{M \in S} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что V – ограниченная функция, в частности $|V(0,\theta,\varphi)| < \infty$; можно допускать любые действительные значения переменной φ, если считать $V(r,\theta,\varphi) = V(r,\theta,\varphi + 2\pi)$. Заметим, что в сферической системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_{r,\theta,\varphi}V(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\Delta_{\theta,\varphi}V\text{, где}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}V=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}. \qquad (3.1)$$

В задаче Штурма-Лиувилля тоже разделим переменные: положим $V(M)=R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$; тогда

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)Y(\theta,\varphi)+$$

$$+\frac{R(r)}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)+\lambda R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)=0.$$

Последнее равенство умножим на r^2 и разделим на $R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$; это позволяет разделить переменные r и $\theta,\ \varphi$:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\frac{dR(r)}{dr}\right)+\lambda\cdot r^2\cdot R(r)}{R(r)}= \qquad (3.2)$$

$$=-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)}=\gamma=const.$$

Отсюда функция $Y(\theta,\varphi)$ должна удовлетворять задаче на собственные значения

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)+\gamma\cdot Y(\theta,\varphi)=0,\quad 0<\theta<\pi, \qquad (3.3)$$

$$Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi); \qquad (3.4)$$

$$|Y(0,\varphi)|<\infty,\quad |Y(\pi,\varphi)|<\infty.$$

Условия ограниченности функции Y при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ следуют из ограниченности функции $V(M)$ в шаре $\overline{D}$. Непрерывные в замкнутой области $\{0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ решения уравнения (3.3), удовлетворяющие условию (3.4), называют сферическими функциями. Некоторые свойства сферических функций, их выражения через многочлены Лежандра P_n и присоединённые функции Лежандра $P_n^{(m)}$ приводятся ниже в дополнении к данному разделу (верхний индекс (m) не имеет смысла производной!). Задача на собственные значения (3.3), (3.4) имеет следующие решения: $\gamma_0 = 0$, $Y_0(\theta,\varphi) \equiv 1$; $\gamma_n = n \cdot (n+1)$, $Y_n^{(m)(c)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot \cos(m\varphi)$, $Y_n^{(m)(s)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot \sin(m\varphi)$, где $n = 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, \ldots, n$ (при $m = 0$ нет функции $Y_n^{(0)(s)}(\theta,\varphi)$).

Теперь из (3.2) для каждого числа $\gamma = \gamma_n = n \cdot (n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, получаем краевую задачу на собственные значения относительно функции $R(r)$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \dfrac{dR(r)}{dr}\right) + \\
+\left(\lambda - \dfrac{n \cdot (n+1)}{r^2}\right) \cdot R(r) = 0, \quad 0 < r < r_0 \\
|R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Выполним замену искомой функции: положим $q(r) = \sqrt{r} \cdot R(r)$ (проведите подробно указанную замену!). Тогда задача (3.5) примет вид

$$\begin{cases} r^2 \cdot q''(r) + r \cdot q'(r) + \\ + \left(\lambda \cdot r^2 - \left(n + \dfrac{1}{2} \right)^2 \right) \cdot q(r) = 0, \\ q(0) = 0, \quad q(r_0) = 0; \end{cases} \tag{3.6}$$

здесь мы учли, что если $|R(0)| < \infty$, то $\sqrt{r} \cdot R(r) \underset{r \to 0}{\to} 0$. При $\lambda > 0$ заменим в (3.6) независимую переменную: положим $\xi = \sqrt{\lambda} \cdot r$, $q = q(\xi(r))$ (проведите подробно указанную замену!). Получаем краевую задачу

$$\begin{cases} \xi^2 \cdot q''_{\xi\xi}(\xi) + \xi \cdot q'_{\xi}(\xi) + \\ + \left(\xi^2 - \left(n + \dfrac{1}{2} \right)^2 \right) \cdot q(\xi) = 0, \\ q\big|_{\xi=0} = 0, \quad q\big|_{\xi=\sqrt{\lambda} \cdot r_0} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Это задача для уравнения Бесселя (2.4) с полуцелым индексом $\nu = n + \dfrac{1}{2}$. Краевое условие при $\xi = 0$ выделяет в качестве решения функцию Бесселя: $q(\xi) = const \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$ (функция Неймана $N_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$ не ограничена в окрестности точки $\xi = 0$). Из другого краевого условия можно найти собственные значения λ: $J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda} \cdot r_0\right) = 0$. Через $\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ обозначим k – ый положительный корень уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0$ (здесь n фиксировано; $n=0,1,2,\ldots$). Тогда имеем собственные значения $\lambda_k^{(n)}=\left(\dfrac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}\right)^2$; им соответствуют собственные функции задачи (3.5):

$$R_k^{(n)}(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad k=1,2,\ldots.$$

Используя обобщенный степенной ряд (2.5), убедитесь, что $\left|R_k^{(n)}(0)\right|<\infty$.

Итак, каждому собственному значению $\lambda_k^{(n)}$ соответствуют $2n+1$ линейно независимых функций $V_{n,m,k}(M)$ задачи Штурма-Лиувилля в шаре $\overline{D}$:

$$V_{0,0,k}(M)=\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right),\quad k=1,2,\ldots;$$

$$V_{n,m,k}^{(c)}(M)=\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right)\cdot Y_n^{(m)(c)}(\theta,\varphi),$$

$$V^{(s)}_{n,m,k}(M)=\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right)\cdot Y_n^{(m)(s)}(\theta,\varphi),$$

где $n=1,2,\ldots,\ m=0,1,\ldots,n$ (при $m=0$ нет функции $V^{(s)}_{n,0,k}(M)$), $k=1,2,\ldots$.

Решение первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в шаре $\overline{D}$ надо искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right)\cdot A_{0,0,k}\cdot\right.$$

$$\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right)\cdot\left(A_{n,m,k}\cdot Y_n^{(m)(c)}(\theta,\varphi)+\right.$$

$$\left.\left.+B_{n,m,k}\cdot Y_n^{(m)(s)}(\theta,\varphi)\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}\right].$$

Коэффициенты $A_{n,m,k}$ и $B_{n,m,k}$ можно найти из начального условия $u(M,0)=p(M)$ в $\overline{D}$. Для этого надо ввести скалярное произведение функций $p = p(r,\theta,\varphi)$, $g = g(r,\theta,\varphi)$, заданных в $\overline{D}$, по формуле

$$(p,g) = \iiint\limits_{\overline{D}} p(M)g(M)dD_M =$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} p(r,\theta,\varphi)\cdot g(r,\theta,\varphi)d\varphi \tag{3.8}$$

($r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ – элемент объема), доказать ортогональность системы всех собственных функций $\{V_{n,m,k}(M)\}$ и найти $\|V_{n,m,k}\|^2$. Тогда можно будет построить ряд Фурье функции $p(M)$ по системе $\{V_{n,m,k}(M)\}$ и найти коэффициенты $A_{n,m,k}$ и $B_{n,m,k}$.

Отметим, что ортогональность системы функций $\{V_{n,m,k}(M)\}$ в шаре $\overline{D}$ следует из ортогональности (с весом r) системы функций Бесселя $\left\{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ и из ортогональности системы сферических функций (см. дополнение ниже). Для евклидовой нормы в смысле скалярного произведения (3.8) имеем

$$\|V_{n,m,k}\|^2 =$$

$$= \int_0^{r_0}\left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}r\right)\right]^2 \cdot r dr \cdot \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi}\left[Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right]^2 d\varphi.$$

Дополнение.

Данное дополнение содержит справочный материал о многочленах Лежандра, присоединённых функциях Лежандра и о сферических функциях (их подробное изучение дано в [1-3]. Свойства многочленов Лежандра не связаны с рассмотренной выше задачей для уравнения теплопроводности, поэтому мы изменим обозначения: независимую переменную многочлена Лежандра обозначим через x .

Уравнение

$$\left(1-x^2\right)\cdot y''(x)-2x\cdot y'(x)+n\cdot(n+1)\cdot y(x)=0 \qquad (3.9)$$

при $n=0,1,2,\ldots$ называют уравнением Лежандра порядка n. Его можно записать также в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx}\right]+n\cdot(n+1)\cdot y(x)=0.$$

Многочлены Лежандра можно определить формулой Родрига:

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right], \qquad (3.10)$$

где $n=0,1,2,\ldots$ – степень многочлена (так определённые многочлены $\mathrm{P}_n(x)$ называют стандартизованными многочленами Лежандра). Очевидно, что $\mathrm{P}_0(x)\equiv 1$, $\mathrm{P}_1=x$, $\mathrm{P}_2=\frac{1}{2}\cdot\left(3x^2-1\right)$ и т.д. Многочлены Лежандра степени n удовлетворяют уравнению Лежандра (3.9) порядка n.

Легко проверить, что многочлены $\mathrm{P}_{2k}(x)$ являются четными функциями, а многочлены $\mathrm{P}_{2k+1}(x)$ – нечётные функции. Для любой степени n при $-1\le x\le 1$ выполнено неравенство $\left|\mathrm{P}_n(x)\right|\le 1$, причём $\mathrm{P}_n(-1)=(-1)^n$, $\mathrm{P}_n(1)=1$.

Многочлены Лежандра удовлетворяют некоторым рекуррентным формулам:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)\cdot x\cdot P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0; \tag{3.11}$$

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)\cdot P_n(x). \tag{3.12}$$

Рекуррентная формула (3.10) определяет все многочлены $P_n(x)$, т.к. $P_0(x)$ и $P_1(x)$ известны.

Многочлены $P_n(x)$ ортогональны на отрезке $[-1,1]$: $\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx=0$ при $n\neq k$. Евклидова норма многочлена

$\|P_n\|=\left(\int\limits_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет рекуррентной формуле

$$\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\|P_{n-1}\|^2. \tag{3.13}$$

Из того, что $\|P_0\|^2=2$, из (3.13) получаем $\|P_n\|^2=\dfrac{2}{2n+1}$ (докажите!).

В пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$, ортогональная система многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной: если для непрерывной функции $f(x)$ выполнено $\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=0$ при всех $n=0,1,2,\ldots$, то $f(x)\equiv 0$ на $[-1,1]$.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения: найти такие значения параметра γ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx}\right]+\gamma\cdot y(x)=0,\quad -1<x<1, \tag{3.14}$$

ограниченные при $x=-1$ и при $x=1$ (и удовлетворяющие условию нормировки $y(1)=1$). Оказывается, что все собственные значения имеют вид $\gamma_n = n\cdot(n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, а соответствующие им собственные функции пропорциональны многочленам Лежандра (условие $y(1)=1$ выделяет стандартизованные многочлены $\mathrm{P}_n(x)$). Все они, разумеется, непрерывны на отрезке $-1\le x\le 1$.

Рассмотрим более общую, чем (3.14), задачу на собственные значения: найти такие значения параметра γ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx}\right]+\left(\gamma-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\cdot y(x)=0, \tag{3.15}$$

$-1<x<1$, ограниченные при $x=-1$ и при $x=1$ (здесь m фиксировано; $m=0,1,2,\ldots$). В уравнении (3.15) выполним замену искомой функции: положим $y(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\cdot v(x)$, причем $v(-1)\neq 0$, $v(1)\neq 0$. Тогда уравнение (3.15) приведётся к виду

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\cdot v''(x)-2\cdot(m+1)\cdot x\cdot v'(x)+\\&+[\gamma-m\cdot(m+1)]\cdot v(x)=0\end{aligned} \tag{3.16}$$

(проведите подробный вывод уравнения (3.16)!). Можно доказать, что уравнение (3.16) получается, если уравнение (3.14) продифференцировать m раз (производную $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[\left(1-x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx}\right]$ надо вычислять по формуле Лейбница). При этом оказывается, что производная $\frac{d^m y}{dx^m}$ решения уравнения (3.14) удовлетворяет уравнению

(3.16). Но уравнение (3.14) имеет m раз дифференцируемые решения только при $\gamma = \gamma_n = n \cdot (n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Этими решениями являются многочлены Лежандра $P_n(x)$. Поэтому уравнение (3.16) имеет непрерывные на отрезке $-1 \le x \le 1$ решения только при $\gamma = \gamma_n$; этими решениями являются $\dfrac{d^m P_n}{dx^m}$. Таким образом, задача на собственные значения (3.15) имеет решение

$$\gamma_n = n \cdot (n+1), \qquad P_n^{(m)}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n}{dx^m},$$ где

$n = 0, 1, 2, \dots$ (в записи $P_n^{(m)}$ верхний индекс не имеет смысла производной!). Функции $P_n^{(m)}(x)$ называют присоединёнными функциями Лежандра m-го порядка. Очевидно, что $P_n^{(m)}(x)$ не равна тождественно нулю только при $m = 0, 1, \dots, n$.

Присоединённые функции Лежандра ортогональны на отрезке $[-1, 1]$: $\int\limits_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = 0$ при $n \ne k$; при этом

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(P_n^{(m)}(x)\right)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Сферические функции $Y(\theta, \varphi)$ – это непрерывные в замкнутой области $\{0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ решения уравнения (3.3), которые удовлетворяют условию (3.4); оператор $\Delta_{\theta,\varphi}$ определён в (3.1). Можно считать, что функции $Y(\theta, \varphi)$ заданы на сфере радиуса 1. Выразим их через P_n и $P_n^{(m)}$.

Сначала рассмотрим сферические функции, которые не зависят от переменной φ, т.е. $Y = Y(\theta)$. В этом случае уравнение (3.3) имеет вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{dY}{d\theta}\right)+\gamma\cdot Y=0. \qquad (3.17)$$

Выполним в (3.17) замену независимой переменной: положим $\xi=\cos\theta$ (проведите подробно указанную замену!). Тогда получим уравнение

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{dY(\xi)}{d\xi}\right)+\gamma\cdot Y(\xi)=0, \qquad (3.18)$$

т.е. уравнение (3.14), в котором роль независимой переменной играет $\xi=\cos\theta$. Непрерывные на отрезке $-1\leq\xi\leq1$ решения этого уравнения имеются только при $\gamma=\gamma_n=n\cdot(n+1)$, где $n=0,1,2,\ldots$; эти решения – многочлены Лежандра $\mathrm{P}_n(\xi)$. Итак, сферические функции, которые не зависят от φ, это $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$. Их называют зональными сферическими функциями.

Вернёмся к уравнению (3.3) в общем случае: $Y=Y(\theta,\varphi)$. Разделим в нём переменные θ и φ: будем искать его нетривиальные частные решения вида $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$; тогда

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\cdot\Phi(\varphi)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\Theta(\theta)+$$
$$+\gamma\cdot\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)=0.$$

Последнее равенство умножим на $\sin^2\theta$ и разделим на $\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$:

$$\frac{\sin\theta\cdot\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)}{\Theta(\theta)}+\gamma\cdot\sin^2\theta=$$

$$= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \delta = const \,. \tag{3.19}$$

Отсюда функция $\Phi(\varphi)$ должна удовлетворять задаче на собственные значения $\Phi''(\varphi) + \delta \cdot \Phi(\varphi) = 0$, $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Её решения: $\delta = \delta_0 = 0$, $\Phi_0(\varphi) \equiv 1$; $\delta = \delta_m = m^2$, $\Phi_m^{(c)}(\varphi) = \cos(m\varphi)$, $\Phi_m^{(s)}(\varphi) = \sin(m\varphi)$ при $m = 1, 2, \ldots$

При каждом значении $\delta = \delta_m$ из равенства (3.19) получаем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \left(\gamma - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \,. \tag{3.20}$$

Выполним в (3.20) замену независимой переменной: положим $\xi = \cos\theta$. Тогда получим уравнение

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right) + \left(\gamma - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)\Theta(\xi) = 0, \tag{3.21}$$

т.е. уравнение (3.15), в котором роль независимой переменной играет $\xi = \cos\theta$. Непрерывные на отрезке $-1 \le \xi \le 1$ решения этого уравнения имеются только при $\gamma = \gamma_n = n \cdot (n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$; эти решения – присоединённые функции Лежандра $\mathrm{P}_n^{(m)}(\xi)$, $m = 0, 1, \ldots, n$. При $m = 0$ уравнение (3.21) имеет вид (3.18), и $\mathrm{P}_n^{(0)}(\xi) = \mathrm{P}_n(\xi)$.

Итак, сферические функции – это произведения $\mathrm{P}_n^{(m)}(\cos\theta)$ на $\cos(m\varphi)$ или на $\sin(m\varphi)$; их принято обозначать через $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$. Возможно (но не обязательно) следующее соглашение. Отрицательный верхний индекс m можно приписать тем функциям $Y_n^{(m)}$, которые содержат $\cos(m\varphi)$, а положительный верхний индекс – тем, которые содержат $\sin(m\varphi)$. Тогда при каждом $n=0,1,2,\ldots$ имеем: $Y_n^{(0)}(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_n(\cos\theta)$, а при каждом $m=1,\ldots,n$ полагаем

$$Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot\cos(m\varphi),$$
$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot\sin(m\varphi).$$

Эти $2n+1$ функций называют фундаментальными сферическими функциями n-го порядка.

Если наборы индексов (n_1,m_1) и (n_2,m_2) различны, то фундаментальные сферические функции $Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)$ и $Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)$ ортогональны на сфере $S=\{r=1, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi\}$:

$$\iint_S Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)\cdot Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)ds=$$
$$=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)\cdot Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)d\varphi=0$$

($dS=\sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент площади сферы радиуса 1). В частности, при $n_1\ne n_2$ любые две сферические функции ортогональны.

$$\left\|Y_n^{(-m)}\right\|^2=\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\left[Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right]^2d\varphi=$$
$$=\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\varepsilon_m,\text{ где }\varepsilon_m=\begin{cases}2\ при\ m=0;\\1\ при\ m=1,\ldots,n.\end{cases}$$

В пространстве функций, непрерывных на сфере S радиуса 1, совокупность всех сферических функций $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$, где $n=0,1,2,\ldots$, $m=-n,\ldots,0,\ldots,n$ является полной.

Функции, заданной на S, можно поставить в соответствие её ряд Фурье по системе фундаментальных сферических функций. Запишите выражения коэффициентов Фурье. #

Задача 1. Найти общий вид решения стационарного уравнения теплопроводности в шаре D радиуса r_0.

Решение. Требуется найти общий вид решения уравнения Лапласа $\Delta_M V(M)=0$ в шаре D, непрерывного в $\overline{D}$. Разделяя переменные r и θ, φ, получим задачу на собственные значения (3.3), (3.4) и уравнение Эйлера

$$r^2 \cdot R''(r) + 2r \cdot R'(r) - \gamma \cdot R(r) = 0,$$

которое надо решить при $\gamma = \gamma_n = n \cdot (n+1)$, $n = 0,1,2,\dots$. Его решение: $R(r) = const \cdot r^n$ (решение r^{-n-1} имеет особенность при $r=0$). Отсюда получаем

$$V(r,\theta,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} \Big(A_{n,m} \cdot Y_n^{(m)(c)}(\theta,\varphi) +$$

$$+ B_{n,m} \cdot Y_n^{(m)(s)}(\theta,\varphi) \Big) =$$

$$= C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} \mathrm{P}_n^{(m)}(\cos\theta) \big(A_{n,m} \cos(m\varphi) + B_{n,m} \sin(m\varphi) \big)$$

Коэффициенты C, $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ можно искать из краевого условия на границе шара. В случае задачи Неймана для уравнения Лапласа C – произвольная постоянная. #

Задача 2. $\overline{D}$ – шар радиуса r_0, $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$;

$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u$ в D при $t > 0$;

$u\big|_{r=r_0} = u_0 \cdot \mathrm{P}_7(\cos\theta)$ при $t > 0$; $u(M,0) = 0$ при $M \in \overline{D}$; $u_0 = const$.

Решение. Выполним замену искомой функции: $u(M,t) = v(M,t) + U(M)$, где функция $U(M)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta U(M) = 0 \text{ в } D;$$

$$U\big|_{r=r_0} = u_0 \cdot \mathrm{P}_7(\cos\theta).$$

Используя задачу 1, получаем $U(r,\theta,\varphi) = u_0 \cdot \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^7 \cdot \mathrm{P}_7(\cos\theta)$. Тогда новая искомая функция $v(M,t)$ должна удовлетворять задаче

$$v_t = a^2 \cdot \Delta_M v \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$v\big|_{r=r_0} = 0 \text{ при } t > 0;$$

$$v(M,0) = -u_0 \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^7 \cdot \mathrm{P}_7(\cos\theta).$$

Поскольку $\mathrm{P}_7(\cos\theta) = Y_7^{(0)}(\theta,\varphi)$, решение последней задачи надо искать в виде

$$v(r,\theta,\varphi,t) = \frac{Y_7^{(0)}(\theta,\varphi)}{\sqrt{r}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_{7,0,k} J_{\frac{15}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0} r\right) \exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0}\right)^2 a^2 t\right\}.$$

Найдем коэффициенты:

$$A_{7,0,k}=\frac{\left\|Y_7^{(0)}\right\|^2}{\left\|V_{7,0,k}\right\|^2}\int_0^{r_0}(-u_0)\left(\frac{r}{r_0}\right)^7\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{\frac{15}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0}r\right)\cdot r^2dr,$$

где $\left\|V_{7,0,k}\right\|^2=\frac{r_0^2}{2}\cdot\left[J_{\frac{17}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}\right)\right]^2\cdot\left\|Y_7^{(0)}\right\|^2$. Выполняя замену переменной интегрирования $q=\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0}r$, и пользуясь формулой (2.7), находим

$$\int_0^{r_0}r^{\frac{17}{2}}\cdot J_{\frac{15}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0}r\right)dr=\frac{r_0^{\frac{19}{2}}}{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}\cdot J_{\frac{17}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}\right).$$

Ответ: $u(M,t)=u_0\cdot\mathrm{P}_7(\cos\theta)\cdot\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^7-\right.$

$$\left.-2\sqrt{\frac{r_0}{r}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{15}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}\cdot J_{\frac{17}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}\right)}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2t\right\}\right],$$

где $\mu_k^{\left(\frac{15}{2}\right)}$ – положительные нули функции $J_{\frac{15}{2}}(\mu)$. #

Задача 3. $\overline{D}$ – шар радиуса r_0, $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$;

$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u$ в D при $t > 0$;

$u\big|_{r=r_0} = 0$ при $t > 0$; $u(M,0) = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$ при $M \in \overline{D}$.

(Начальное условие следовало бы записать в виде $u(M,0) = u_0 \cdot r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$, но для упрощения формул мы опускаем постоянную u_0.)

Решение.

$$u(M,t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0} r\right) \left[A_{n,m,k} \cdot Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi) + \right.$$

$$\left. + B_{n,m,k} \cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right] \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}\right)^2 \cdot a^2 \cdot t\right\}.$$

Положим $\xi = \cos\theta$ и заметим, что $\mathrm{P}_1^{(1)}(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{d\mathrm{P}_1(\xi)}{d\xi} = \sin\theta$. Поэтому начальное условие имеет вид

$$u(M,0) = r \cdot \mathrm{P}_1^{(1)}(\cos\theta) \cdot \sin\varphi = r \cdot Y_1^{(1)}(\theta,\varphi).$$

Отсюда видно, что все коэффициенты $A_{n,m,k} = 0$, а при $n \neq 1$ или $m \neq 1$ все $B_{n,m,k} = 0$. Поэтому решение надо искать в виде

$$u(M,t)=\frac{Y_1^{(1)}(\theta,\varphi)}{\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{\infty}B_{1,1,k}\cdot J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}r\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2t\right\}.$$

Из начального условия найдём коэффициенты:

$$B_{1,1,k}=\left\|V_{1,1,k}\right\|^{-2}\cdot\iiint_D r\cdot Y_1^{(1)}(\theta,\varphi)\cdot V_{1,1,k}^{(s)}(r,\theta,\varphi)\cdot dD_M=$$

$$=\left\|V_{1,1,k}\right\|^{-2}\cdot\int_0^{r_0}r^{\frac{5}{2}}\cdot J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}r\right)dr\cdot\left\|Y_1^{(1)}\right\|^2,$$

где $\left\|V_{1,1,k}\right\|^2=\frac{r_0^2}{2}\left[J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\right]^2\cdot\left\|Y_1^{(1)}\right\|^2.$

Остаётся вычислить интеграл I по отрезку $[0,r_0]$. Выполняя замену переменной интегрирования $q=\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}r$, и пользуясь формулой (2.7), получаем $I=\frac{r_0^{\frac{7}{2}}}{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right).$

Ответ: $u(M,t)=\frac{2r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r}}\cdot \mathrm{P}_1^{(1)}(\cos\theta)\cdot\sin\varphi\cdot$

$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}.\ \#$$

Задача 4. Методом разделения переменных решить начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности в шаре радиуса r_0, граница которого теплоизолирована.

Указание. Задача Штурма-Лиувилля в шаре с краевым условием $\left.\frac{\partial V(M)}{\partial r}\right|_{M\in S}=0$ имеет одним из решений $\lambda=0$, $V(M)\equiv 1$. При $\lambda>0$ в задаче на собственные значения (3.5) вместо краевого условия $R(r_0)=0$ будем иметь $\left.\frac{dR(r)}{dr}\right|_{r=r_0}=0$. Тогда вследствие замены $q(r)=\sqrt{r}\cdot R(r)$ в задаче (3.6) вместо краевого условия $q(r_0)=0$ будем иметь $2r_0\cdot\left.\frac{dq(r)}{dr}\right|_{r=r_0}-q(r_0)=0$. Для нахождения положительных собственных значений λ вместо уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0$ получаем уравнение

$$2\mu \cdot J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) - J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0. \tag{3.22}$$

Пусть $\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, $k = 1,2,\ldots,$ – положительные корни уравнения (3.22); тогда $\lambda_k^{(n)} = \left(\dfrac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0}\right)^2$.

В рассматриваемом случае

$$\left\| J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0} r\right) \right\|^2 = \int_0^{r_0} \left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0} r\right)\right]^2 \cdot r dr =$$

$$= \frac{r_0^2}{2}\left[1 - \frac{n(n+1)}{\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)^2}\right] \cdot \left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)\right]^2 \text{ (см.[3]). \#}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1.3.1. Найти стандартизованный многочлен Лежандра $\mathrm{P}_3(x)$ и его норму.

1.3.2. Доказать, что производные m-го порядка стандартизованных многочленов Лежандра на отрезке $-1 \le x \le 1$ ортогональны с весом $\left(1 - x^2\right)^m$.

1.3.3. Найти все присоединённые функции Лежандра $\mathrm{P}_1^{(m)}(x)$, $\mathrm{P}_2^{(m)}(x)$, $\mathrm{P}_3^{(m)}(x)$.

1.3.4. Найти все фундаментальные сферические функции

$Y_1^{(m)}(\theta,\varphi)$, $Y_2^{(m)}(\theta,\varphi)$, $Y_3^{(m)}(\theta,\varphi)$.

1.3.5. $\overline{D}$ – шар радиуса r_0, $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$;

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0 \qquad \text{при} \qquad t > 0;$$

$$u(M,0) = \frac{\sin(2\theta)\cdot\cos\varphi}{\sqrt{r}} \cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\mu_1^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{r_0} r\right), \text{ где } \mu_1^{\left(\frac{5}{2}\right)} \text{ –}$$

наименьший положительный нуль функции $J_{\frac{5}{2}}(\mu)$.

1.3.6. Решить задачу 1.3.5 с начальным условием

$$u(M,0) = \frac{\sin\theta\cdot\sin(2\theta)\cdot\sin(2\varphi)}{\sqrt{r}} \cdot J_{\frac{7}{2}}\left(\frac{\mu_1^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{r_0} r\right).$$

1.3.7. Решить задачу 1.3.5 с начальным условием $u(M,0) = r^4 \cdot \mathrm{P}_4^{(3)}(\cos\theta)\cdot\cos(3\varphi)$.

1.3.8. $\overline{D}$ – шар радиуса r_0, $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$;

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta)\cdot\sin\varphi \text{ при } t > 0;\ u(M,0) = 0 \text{ в } \overline{D}.$$

1.4. Задачи для неоднородного уравнения теплопроводности в ограниченной области.

Решение начально-краевой задачи в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ с границей S $\left(\overline{D} \subset R^3\right.$ или $\left.\overline{D} \subset R^2\right)$ для неоднородного уравнения теплопроводности основано на разложении искомого решения в ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля в $\overline{D}$. Пусть $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$,

$$\begin{aligned} & u_t = a^2 \cdot \Delta_M u + f(M,t) \text{ в } D \text{ при } t > 0; \\ & u\big|_S = 0 \text{ при } t > 0;\ u(M,0) = 0 \text{ при } M \in \overline{D}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение $u_t = a^2 \cdot \Delta_M u$ и разделим в нём переменные M и t; учтем краевое условие на границе S. Это приводит к задаче Штурма-Лиувилля: $\Delta_M V(M) + \lambda \cdot V(M) = 0$ в D, $V\big|_S = 0$. Её решения $\lambda = \lambda_I$, $V = V_I(M)$ определяются наборами I независимых друг от друга индексов. Решение неоднородного уравнения (4.1) будем искать в виде

$$u(M,t) = \sum_I T_I(t) \cdot V_I(M), \tag{4.2}$$

где коэффициенты $T_I(t)$ надо определить, исходя из уравнения (4.1) и начального условия. Для этого разложим функцию $f(M,t)$ в ряд Фурье по системе функций $\{V_I(M)\}$ в D; пусть $f_I(t)$ – коэффициенты Фурье функции $f(M,t)$. Подставим функциональный ряд (4.2) в (4.1) и учтём, что $\Delta_M V_I(M) = -\lambda_I \cdot V_I(M)$:

$$\sum_I T_I'(t) V_I(M) = -a^2 \sum_I T_I(t) \lambda_I V_I(M) + \sum_I f_I(t) V_I(M).$$

Сравнивая коэффициенты при $V_I(M)$ в последнем равенстве, получаем при каждом наборе индексов I уравнение

$$T_I'(t) + a^2 \cdot \lambda_I \cdot T_I(t) = f_I(t). \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) в начальное условие $u(M,0)=0$, получаем $T_I(0)=0$. Для нахождения коэффициентов $T_I(t)$ надо при каждом наборе I решить задачу Коши для уравнения (4.3).

Совершенно аналогично решается начально-краевая задача с краевым условием второго рода $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0$, где n – нормаль к S.

Задача 1. $\overline{D}=\{0\le x\le l_1, 0\le y\le l_2\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$$u_t=a^2\cdot\Delta_M u+f_0 \text{ в } D \text{ при } t>0;\ f_0=const;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l_1}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=l_2}=0$$

при $t\ge 0$;

$$u(M,0)=0 \text{ при } M\in\overline{D}.$$

Решение. Очевидно, что температура $u(M,t)$ не зависит от M, т.к. граница прямоугольной пластины теплоизолирована, источники теплоты распределены по пластине равномерно, а начальная температура от M не зависит. Поэтому искомая функция $u=u(t)$ удовлетворяет задаче $u_t=f_0$, $u(0)=0$. Отсюда $u(t)=f_0\cdot t$.

Что можно сказать о реалистичности этой модели? (Рассмотрите $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)$ в случаях $f_0>0$, $f_0<0$.) #

Задача 2. Доказать неединственность решени[я] следующей задачи.

$\overline{D}=\{0\le x\le l, 0\le y\le l\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$.

Найти функцию $u=u(M,t)\in C^{2,1}(\overline{D}\times\{0\le t\le T\})$, удовлетворяющую условиям

$$u_t=\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0<t\le T;$$

$$u(x,0,t)=0,\quad u(x,l,t)=xlt,\quad u(0,y,t)=0,$$

$u(l,y,t)=lyt$ при $0\le t\le T$.

Решение. Выполним замену искомой функции: положим $u(M,t)=v(M,t)+xyt$. Тогда функция $v(M,t)$ должна удовлетворять условиям

$$v_t=\Delta_M v-xy \text{ в } D \text{ при } 0<t\le T; \tag{4.4}$$

$$v(x,0,t)=0,\quad v(x,l,t)=0,\quad v(0,y,t)=0,$$

$v(l,y,t)=0$ при $0\le t\le T$.

В однородном уравнении теплопроводности разделим переменные x, y и t; учтём краевые условия для $v(M,t)$ на границе квадрата $\overline{D}$. Тогда получим задачу Штурма-Лиувилля в $\overline{D}$; её собственные значения $\lambda_{m,n}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(m^2+n^2)$ и собственные функции

$V_{m,n}(M)=\sin\frac{\pi mx}{l}\cdot\sin\frac{\pi ny}{l}$, $\|V_{m,n}\|^2=\frac{l^2}{4}$, $m=1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$. Функцию $v(M,t)$ надо искать в виде

$$v(M,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{m,n}(t)\cdot V_{m,n}(M).$$

Подставим этот функциональный ряд в неоднородное уравнение (4.4) и учтём, что $\Delta_M V_{m,n}(M)=-\lambda_{m,n}\cdot V_{m,n}(M)$.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T'_{m,n}(t)\cdot V_{m,n}(M)=$$

$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{m,n}(t)\cdot\lambda_{m,n}\cdot V_{m,n}(M)-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{m,n}\cdot V_{m,n}(M),$$

где $f_{m,n}=\dfrac{4}{l^2}\cdot\int\limits_0^l\int\limits_0^l xy\cdot\sin\dfrac{\pi mx}{l}\cdot\sin\dfrac{\pi ny}{l}dxdy$. Отсюда для определения коэффициентов $T_{m.,n}(t)$ получаем уравнения

$$T'_{m,n}(t)+\lambda_{m,n}\cdot T_{m,n}(t)=-f_{m,n}. \qquad (4.5)$$

Решение каждого из этих уравнений содержит произвольную постоянную. Условия исходной задачи не позволяют однозначно разрешить (4.5). #

Задача 3. $\overline{D}=\{0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u$ в D при $t>0$;

$u(0,y,t)=0$, $u(\pi,y,t)=\sin y$, $u(x,0,t)=0$, $u(x,\pi,t)=0$ при $t>0$;

$u(M,0)=0$ при $M\in\overline{D}$.

Решение. Выполним замену искомой функции:

положим $u(M,t)=v(M,t)+\frac{x}{\pi}\cdot\sin y$. Тогда функция $v(M,t)$ удовлетворяет задаче

$$v_t=a^2\cdot\Delta_M v-a^2\cdot\frac{x}{\pi}\cdot\sin y \text{ в } D \text{ при } t>0;$$

$$v(0,y,t)=0,\quad v(\pi,y,t)=0,\quad v(x,0,t)=0,$$

$v(x,\pi,t)=0$ при $t>0$;

$$v(M,0)=-\frac{x}{\pi}\cdot\sin y \text{ при } M\in\overline{D}.$$

Решение этой задачи можно представить в виде суммы решений следующих двух задач:

$$\begin{cases} v_t=a^2\cdot\Delta_M v \quad \textit{в } D \quad \textit{при } t>0; \\ v\big|_S=0 \textit{ при } t>0\ (S-\textit{граница квадрата } \overline{D}); \\ v(M,0)=-\frac{x}{\pi}\cdot\sin y \quad \textit{при } M\in\overline{D}; \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} v_t=a^2\cdot\Delta_M v-a^2\cdot\frac{x}{\pi}\cdot\sin y \quad \textit{в } D \quad \textit{при } t>0; \\ v\big|_S=0 \textit{ при } t>0;\quad v(M,0)=0 \quad \textit{при } M\in\overline{D}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Для решения двух последних задач разделим переменные x, y и t в однородном уравнении теплопроводности в D; учтём краевое условие $v\big|_S=0$. Тогда получим задачу Штурма-Лиувилля в $\overline{D}$; её собственные значения $\lambda_{m,n}=m^2+n^2$ и собственные функции $V_{m,n}(M)=\sin mx\cdot\sin ny$, $m=1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$. Разложим функцию $\left(-\dfrac{x}{\pi}\right)\cdot\sin y$ в ряд Фурье по системе $\{V_{m,n}(M)\}$ в квадрате $\overline{D}$. Для этого достаточно найти коэффициенты Фурье функции x по системе $\{\sin mx\}_{m=1}^{\infty}$ на отрезке $0\le x\le\pi$: $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin mx\,dx=\dfrac{2}{m}\cdot(-1)^{m+1}$. Отсюда ясно, что ряд Фурье функции $\left(-\dfrac{x}{\pi}\right)\cdot\sin y$ по системе $\{V_{m,n}(M)\}$ имеет вид $\dfrac{2}{\pi}\cdot\sin y\cdot\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m}\cdot\sin mx$.

Решение задачи (4.6) надо искать в виде $v(M,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{m,n}\cdot V_{m,n}(M)\cdot\exp\{-(m^2+n^2)\cdot a^2\cdot t\}$. Из начального условия задачи (4.6) вытекает, что при $n\ne1$ все коэффициенты $C_{m,n}=0$, а коэффициенты $C_{m,1}=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^m}{m}$. Получили решение задачи (4.6):

$$v(M,t)=\frac{2}{\pi}\cdot\sin y\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin mx\cdot\exp\{-(m^2+1)a^2t\}.$$

Решение задачи (4.7) надо искать в виде $v(M,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_{m,n}(t)\cdot V_{m,n}(M)$. Подставим этот функциональный ряд в неоднородное уравнение (4.7) и учтём, что $\Delta_M V_{m,n} = -\lambda_{m,n} \cdot V_{m,n}(M)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T'_{m,n}(t) \cdot V_{m,n}(M) = -a^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}(t) \cdot \lambda_{m,n} \cdot V_{m,n}(M) +$$

$$+ a^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin y \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \sin mx.$$

Из начального условия задачи (4.7) вытекает, что $T_{m,n}(0) = 0$ при всех m и n. Отсюда следует, что при $n \neq 1$ все $T_{m,n}(t) \equiv 0$. Для нахождения $T_{m,1}(t)$ получили задачу Коши:

$$T'_{m,1}(t) + a^2 \cdot (m^2+1) \cdot T_{m,1}(t) = a^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^m}{m};$$

$$T_{m,1}(0) = 0.$$

Её решение:

$$T_{m,1}(t) = \frac{2 \cdot (-1)^m}{\pi m (m^2+1)} \cdot \left[1 - \exp\left\{-(m^2+1) \cdot a^2 \cdot t\right\}\right].$$

Возвращаясь к искомой функции $u(M,t)$, получаем ответ:

$$u(M,t) = \frac{\sin y}{\pi}\left[x + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m(m^2+1)} \cdot \sin mx + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cdot (-1)^m}{m^2+1} \cdot \sin mx \cdot \exp\left\{-(m^2+1) \cdot a^2 \cdot t\right\}\right].$$

Возможен иной подход к решению исходной задачи. Заметим, что функция $w(M,t) = \frac{shx}{sh\pi} \cdot \sin y$ удовлетворяет условиям

$$w_t = a^2 \cdot \Delta_M w \equiv 0 \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$w(0,y,t)=0$, $w(\pi,y,t)=\sin y$, $w(x,0,t)=0$, $w(x,\pi,t)=0$ при $t>0$;

$$w(M,0)=\frac{shx}{sh\pi}\cdot\sin y \text{ при } M\in\overline{D}.$$

Поэтому для нахождения решения $u(M,t)$ исходной задачи достаточно решить задачу

$$\begin{cases} q_t = a^2 \cdot \Delta_M q \quad \text{в } D \quad \text{при } t>0; \\ q\big|_S = 0 \ \text{при } t>0; \\ q(M,0) = -\dfrac{shx}{sh\pi}\cdot\sin y \quad \text{при } M\in\overline{D}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Тогда $u(M,t)=w(M,t)+q(M,t)$, причём $w=w(M)$.

Решение задачи (4.8) имеет вид

$q(M,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}Q_{m,n}\cdot V_{m,n}(M)\cdot\exp\{-\lambda_{m,n}\cdot a^2\cdot t\}$. Чтобы найти коэффициенты $Q_{m,n}$ из начального условия задачи (4.8), надо функцию $\left(-\dfrac{shx}{sh\pi}\cdot\sin y\right)$ разложить в ряд Фурье по системе $\{V_{m,n}(M)\}$ в квадрате $\overline{D}$. Для этого достаточно найти коэффициенты Фурье функции

$\frac{shx}{sh\pi}$ по системе $\{\sin mx\}_{m=1}^{\infty}$ на отрезке $0 \le x \le \pi$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{shx}{sh\pi}\cdot\sin mx\,dx = \frac{2m\cdot(-1)^{m+1}}{\pi(m^2+1)} \text{ (проверьте!).}$$

Тогда $u(M,t) = \frac{shx}{sh\pi}\cdot\sin y +$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\sin y\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\cdot(-1)^m}{m^2+1}\cdot\sin mx\cdot\exp\{-(m^2+1)\cdot a^2\cdot t\}.$$

Убедитесь в совпадении полученных ответов!#

Задача 4. $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi\} \subset R^2$, $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$. Стационарная температура $u(M,t) = \frac{u_0}{3}\cdot r^2\cdot\sin\varphi$, $u_0 = const$, однородной плоской круглой пластины $\overline{D}$ получена заданием на её границе во все моменты времени температуры $u(r_0,\varphi,t) = \frac{u_0}{3}\cdot r_0^2\cdot\sin\varphi$ и действием источников (или поглотителей) теплоты в пластине. Найти их распределение по пластине.

Решение. Требуется решить обратную задачу о нахождении распределения источников. Температура $u(M,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2\cdot\Delta_{r,\varphi}u + \frac{F(r,\varphi,t)}{C\cdot\rho}$, где $a^2 = \frac{k}{C\cdot\rho}$, F – объёмная плотность мгновенных источников теплоты, k – коэффициент теплопроводности, C – удельная теплоёмкость, ρ – объёмная плотность массы. Стационарность температуры означает $u_t \equiv 0$, т.е. $u = u(M)$, и тогда выполнено уравнение Пуассона: $\Delta_{r,\varphi} u = -\dfrac{F}{k}$. Применим оператор $\Delta_{r,\varphi}$ к заданной функции: $\Delta_{r,\varphi}\left(\dfrac{u_0}{3}\cdot r^2 \cdot \sin\varphi\right) = u_0 \cdot \sin\varphi$ (проверьте!). Отсюда $F(r,\varphi,t) = F(r,\varphi) = -k \cdot u_0 \cdot \sin\varphi$.#

Задача 5. $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\} \subset R^2$, $M \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$,

$$u_t = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t > 0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = u_0 \cdot \cos(2\varphi) \cdot \sin(\gamma t) \quad \text{при} \quad t \ge 0;$$

$u_0 = const$, $\gamma = const > 0$;

$$u(M,0) = 0 \text{ при } M \in \overline{D}.$$

Решение. Выполним замену искомой функции: положим $u(M,t) = v(M,t) + w(M) \cdot \sin(\gamma t)$, где функцию $w(M)$ подчиним условиям

$$\begin{cases} \Delta_M w(M) = 0 \quad \textit{в} \ D; \\ w\big|_{r=r_0} = u_0 \cdot \cos(2\varphi). \end{cases} \tag{4.9}$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (4.9) имеет вид $w(M) = u_0 \cdot \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 \cdot \cos(2\varphi)$ (проверьте!). Тогда функция $v(M,t)$ должна удовлетворять задаче

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \Delta_M v - u_0 \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 \cos(2\varphi) \cdot \gamma \cdot \cos(\gamma t) \\ в\ D \quad при\ t > 0; \\ v\big|_{r=r_0} = 0\ при\ t \geq 0; \quad v(M,0) = 0 \\ при\ M \in \overline{D}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Разделяя переменные M и t в однородном уравнении теплопроводности, получим задачу Штурма-Лиувилля в круге $\overline{D}$: $\Delta V(M) + \lambda \cdot V(M) = 0$ в D, $V\big|_{r=r_0} = 0$. Её решения были получены в разделе 1.2. Из всех собственных функций этой задачи выберем функции

$$V_{2,k}^{(c)}(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right) \cdot \cos(2\varphi),\ k = 1, 2, \ldots,\ \text{где}$$

$\mu_k^{(2)}$ – положительные нули функции $J_2(\mu)$. Разложим функцию r^2 в ряд Фурье-Бесселя по системе $\left\{J_2\left(\dfrac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ на интервале $0 < r < r_0$. Для этого вычислим коэффициенты Фурье:

$$\left\|J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right)\right\|^{-2} \cdot \int_0^{r_0} r^2 \cdot J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right) \cdot r dr = \frac{2r_0^2}{\mu_k^{(2)} \cdot J_3\left(\mu_k^{(2)}\right)}.$$

Введём обозначения: $\delta_k = \dfrac{2}{\mu_k^{(2)} \cdot J_3\left(\mu_k^{(2)}\right)}$.

Решение задачи (4.10) будем искать в виде

$$v(M,t) = \cos(2\varphi) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right). \qquad (4.11)$$

Подставим (4.11) в уравнение задачи (4.10) и разделим на $\cos(2\varphi)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \cdot J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right) = -a^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right) -$$

$-u_0 \cdot \gamma \cdot \cos(\gamma t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \cdot J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right)$; здесь мы учли, что

$\Delta V_{2,k}^{(c)}(r,\varphi) = -\lambda_k^{(2)} \cdot V_{2,k}^{(c)}(r,\varphi)$, где $\lambda_k^{(2)} = \left(\dfrac{\mu_k^{(2)}}{r_0}\right)^2$. Сравним коэффициенты при каждой функции $J_2\left(\dfrac{\mu_k^{(2)}}{r_0} r\right)$ (при каждом k) и используем начальное условие в (4.10):

$$\begin{cases} T_k'(t) + a^2 \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot T_k(t) = -u_0 \cdot \gamma \cdot \delta_k \cdot \cos(\gamma t), \\ T_k(0) = 0. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Решая задачу Коши (4.12), получаем

$$T_k(t) = -\frac{u_0 \cdot \gamma \cdot \delta_k}{\gamma^2 + a^4\left(\lambda_k^{(2)}\right)^2} \cdot \left\{a^2 \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot \left[\cos(\gamma t) - \right.\right. \qquad (4.13)$$

$$\left.\left. - \exp\left\{-a^2 \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot t\right\}\right] + \gamma \cdot \sin(\gamma t)\right\}.$$

Ответ: $u(M,t)=u_0\cdot\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2\cos(2\varphi)\cdot\sin(\gamma t)+$

$$+\cos(2\varphi)\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}r\right).\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения.

1.4.1. $\overline{D}=\{0\le x\le l_1, 0\le y\le l_2\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u+u_0\cdot x\cdot y$ в D при $t>0$; $u_0=const$;

$u_x(0,y,t)=0$, $u(l_1,y,t)=0$, $u(x,0,t)=0$, $u_y(x,l_2,t)=0$ при $t\ge 0$;

$u(M,0)=0$ при $M\in\overline{D}$.

1.4.2. $\overline{D}=\{0\le r\le r_0, 0\le\varphi<2\pi\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u+u_0\cdot t$ в D при $t>0$; $u_0=const$;

$u\big|_{r=r_0}=0$ при $t\ge 0$; $u(M,0)=0$ при $M\in\overline{D}$.

1.4.3. $\overline{D}=\{0\le r\le r_0, 0\le\varphi<2\pi\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u$ в D при $t>0$;

$u\big|_{r=r_0}=u_0\cdot e^{-\gamma t}$ при $t>0$; $u_0=const$, $\gamma=const>0$;

$$u(M,0)=0 \text{ при } M\in\overline{D}.$$

1.4.4. $\overline{D}=\{0\le r\le r_0, 0\le\varphi<2\pi\}\subset R^2$, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$$u_t=a^2\cdot\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } t>0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=p=const\ne 0 \text{ при } t>0;$$

$$u(M,0)=0 \text{ при } M\in\overline{D}.$$

1.5. Задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве и на плоскости.

Задача Коши для уравнения теплопроводности представляет собой математическую модель распространения теплоты в пространстве R^3 (или на плоскости R^2) при условии, что всюду известна температура в начальный момент времени $t=0$. В этой задаче следует задавать лишь одно начальное условие; это объясняется тем, что гиперповерхность $t=0$ является характеристикой уравнения теплопроводности. Задача Коши для однородного уравнения состоит в нахождении функции $u(M,t)$, удовлетворяющей условиям

$$u_t=a^2\cdot\Delta_M u \text{ при } M\in R^3,\ 0<t<+\infty; \quad (5.1)$$

$$u(M,0)=\varphi(M) \text{ при } M\in R^3. \quad (5.2)$$

На плоскости R^2 задача Коши ставится точно так же.

Классическим решением задачи Коши для уравнения теплопроводности называют функцию

$u(M,t)\in C(M\in R^3, 0\le t<+\infty)\cap C^{2,1}(M\in R^3, 0<t<+\infty)$, удовлетворяющую условиям (5.1), (5.2).

Задача (5.1), (5.2) имеет функцию Грина:

$$G(M,P;t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\},$$

где $M=M(x,y,z)$, $P=P(\xi,\eta,\zeta)$. Если $\varphi(M)$ – непрерывная и ограниченная в R^3 функция, то функция

$$u(M,t)=\iiint\limits_{R^3}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta;t)\cdot\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

является классическим решением задачи (5.1), (5.2), ограниченным при $M\in R^3$, $0\le t<+\infty$. Задача (5.1), (5.2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в R^3 при $0\le t<+\infty$. Требование ограниченности искомой функции $u(M,t)$ существенно: оно является условием, достаточным для единственности решения задачи (5.1), (5.2).

Функция Грина задачи Коши на плоскости R^2 имеет вид

$$G(M,P;t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\},$$

где $M=M(x,y)$, $P=P(\xi,\eta)$.

Задача 1. $M\in R^3$, $u=u(M,t)$;

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u$ в R^3 при $t>0$;

$$u(M,0)=\begin{cases}u_0=const, \textit{ если } M \textit{ принадлежит шару } 0\le r\le r_0;\\ 0, \textit{ если } M \textit{ находится вне этого шара};\end{cases}$$

$M=M(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Очевидно, что $u=u(r,t)$. В случае сферической симметрии

$$\Delta_M u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \cdot u)}{\partial r^2}.$$

Поэтому уравнение имеет вид $u_t = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \cdot u)}{\partial r^2}$.
Умножим это уравнение на r и введём новую неизвестную функцию $v(r,t) = r \cdot u(r,t)$. Функция $v(r,t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot v_{rr}, 0 < r < +\infty, t > 0; \\ v(r,0) = \begin{cases} u_0 \cdot r, \text{ если } 0 \le r \le r_0; \\ 0, \quad \text{если } r > r_0; \end{cases} \\ v(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Условие $v(0,t) = 0$ выполнено в силу ограниченности искомой функции $u(r,t)$ при $r = 0$.

Для задачи (5.3) на луче $0 \le r < +\infty$ известна функция Грина (она строится методом продолжения на луч $-\infty < r \le 0$). Поэтому можно записать решение задачи:

$$v(r,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{r_0} \left[\exp\left\{ -\frac{(r-q)^2}{4a^2 t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(r+q)^2}{4a^2 t} \right\} \right] \cdot u_0 q dq.$$

Выполняя замены переменной интегрирования $p = \frac{r-q}{2a\sqrt{t}}$ и $p = \frac{r+q}{2a\sqrt{t}}$, получаем

$$v(r,t)=\frac{u_0 r}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2}dp+\frac{u_0 a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}}} de^{-p^2}=$$

$$=\frac{u_0 r}{2}\left[erf\left(\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}}\right)-erf\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}\right)\right]+$$

$$+\frac{u_0 a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}}\right)^2\right\}-\exp\left\{-\left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}}\right)^2\right\}\right],$$ где

$erf(\beta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\beta} e^{-\alpha^2}d\alpha$. Вспоминая, что

$u(r,t)=\frac{1}{r}\cdot v(r,t)$, находим ответ в исходной задаче. #

Задача 2. $M\in R^3$, $u=u(M,t)$;

$u_t=a^2\cdot\Delta_M u+f(M)$ в R^3 при $t>0$;

$u(M,0)=0$ при $M\in R^3$.

Решение. Пусть $M=M(x,y,z)$, $P=P(\xi,\eta,\zeta)$, $r=\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $u(M,t)=\int\limits_0^t d\tau\iiint\limits_{R^3} G(M,P;t-\tau)f(P)d\xi d\eta d\zeta=$

$$=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\right)^3\cdot$$

$$\cdot\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \iiint_{R^3} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\cdot$$

$$\cdot f(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta .$$

Поскольку в данной задаче функция f не зависит от времени t, можно поменять порядок интегрирования:

$$u(M,t)=$$

$$=\iiint_{R^3} f(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^t \frac{\exp\left\{-\frac{r^2(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau d\xi d\eta d\zeta .$$

В интеграле по переменной τ выполним замену переменной интегрирования: положим $\mu=\frac{r}{2a\sqrt{t-\tau}}$ (здесь r и τ – независимые переменные, t – параметр); $d\mu=\frac{r\cdot d\tau}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}$.

$$u(M,t)=\iiint_{R^3} f(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{4a^2\pi r}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\mu^2}d\mu\right)d\xi d\eta d\zeta =$$

$$=\frac{1}{4a^2\pi}\iiint_{R^3}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\left(1-erf\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)\right)d\xi d\eta d\zeta ,$$ где r – расстояние между точками M и P. #

Задача 3. $M = M(x,y,z) \in R^3$, $u = u(M,t)$;

$u_t = \Delta_M u$ в R^3 при $t > 0$;

$u(M,0) = \sin(2x) + \cos(2y) + \sin(2z)$ при $M \in R^3$;

$|u(M,t)| < const$.

Ответ:

$u(x,y,z,t) = e^{-2t} \cdot (\sin(2x) + \cos(2y) + \sin(2z))$.

По теореме единственности решения задачи Коши других решений нет.#

Задача 4. $M = M(x,y) \in R^2$, $u = u(M,t)$;

$u_t = \Delta_M u$ в R^2 при $t > 0$;

$u(M,0) = \sin x + \cos y$ при $M \in R^2$;

$|u(M,t)| < const$.

Ответ: $u(x,y,t) = e^{-t} \cdot (\sin x + \cos y)$. По теореме единственности решения задачи Коши других решений нет.#

Задача 5. $M = M(x,y) \in R^2$, $u = u(M,t)$;

$u_t = 4 \cdot \Delta_M u + e^{-t} \cdot \cos(x + y)$ в R^2 при $t > 0$;

$u(M,0) = 0$ при $M \in R^2$;

Решение. Положим $u(M,t) = v(t) \cdot \cos(x + y)$. Тогда функция $v(t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} v_t = -8v + e^{-t}; \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $v(t)=\frac{1}{7}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right)$ и получаем ответ в исходной задаче.

Более сложный путь решения состоит в вычислении интеграла:

$$u(x,y,t)=\int_0^t\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)^2\left(\iint_{R^2}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\cdot\right.$$

$\left.\cdot e^{-\tau}\cdot\cos(\xi+\eta)d\xi d\eta\right)d\tau$, где $a=2$. Проведите это вычисление!#

Задача 6. $M=M(x,y,z)\in R^3$, $u=u(M,t)$;

$u_t=\Delta_M u$ в R^3 при $t>0$;

$u(M,0)=e^{-x^2}\cdot sh(3y)\cdot\cos(5z)$ при $M\in R^3$.

Решение. Положим $u(M,t)=v(x,t)\cdot sh(3y)\cos(5z)$. Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases}v_t=v_{xx}-16v, & -\infty<x<+\infty, \quad t>0;\\ v(x,0)=e^{-x^2}, & -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

Сделаем ещё одну замену искомой функции: $v(x,t)=e^{-16t}\cdot w(x,t)$. Для $w(x,t)$ получаем задачу

$$\begin{cases}w_t=w_{xx}, & -\infty<x<+\infty, \quad t>0;\\ w(x,0)=e^{-x^2}, & -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

Заметим, что если функция $U(x,t)$ является решением уравнения $w_t(x,t)=w_{xx}$, то и функция

$$\frac{1}{\sqrt{1+4Ct}}\cdot\exp\left\{-\frac{Cx^2}{1+4Ct}\right\}\cdot U\left(\frac{x}{1+4Ct},\frac{t}{1+4Ct}\right)$$

является его решением (здесь $C = const$). Выберем $U(x,t) \equiv 1$, $C = 1$; тогда $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4t}} \cdot \exp\left\{-\dfrac{x^2}{1+4t}\right\}$.

Ответ:

$$u(M,t) = \frac{e^{-16t}}{\sqrt{1+4t}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{1+4t}\right\} \cdot sh(3y) \cdot \cos(5z).$$

Более сложный путь решения состоит в вычислении интеграла:

$$u(M,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 \iiint_{R^3} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\}\cdot$$

$\cdot e^{-\xi^2} \cdot sh(3\eta) \cdot \cos(5\zeta) d\xi d\eta d\zeta$, где $a = 1$. Проведите это вычисление!#

Задача 7. $M = M(x,y) \in R^2$, $u = u(M,t)$;

$8u_t = \Delta_M u + 1$ в R^2 при $t > 0$;

$u(M,0) = \exp\{-(x-y)^2\}$ при $M \in R^2$.

Решение. Рассмотрим две задачи:

$$\begin{cases} 8v_t = \Delta_M v + 1 \quad \textit{в} \quad R^2 \quad \textit{при} \quad t > 0; \\ v(M,0) = 0 \quad \textit{при} \quad M \in R^2; \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} 8w_t = \Delta_M w \quad \textit{в} \quad R^2 \quad \textit{при} \quad t > 0; \\ w(M,0) = \exp\{-(x-y)^2\} \quad \textit{при} \quad M \in R^2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Очевидно, что решение задачи (5.4) не зависит от переменных x и y, т.е. задача (5.4) имеет вид $v = v(t)$,

$8v_t = 1$, $v(0) = 0$. Отсюда $v(t) = \dfrac{t}{8}$.

В задаче (5.5) введём обозначение: $z = x - y$. Очевидно, что решение задачи (5.5) надо искать в виде $w = w(z,t)$. Тогда $w_{xx} = w_{zz}$ и $w_{yy} = w_{zz}$ (проверьте!); $\Delta_M w = 2w_{zz}$. Поэтому (5.5) записывается в виде

$$\begin{cases} w_t = \frac{1}{4} w_{zz}, & -\infty < z < +\infty, \quad t > 0; \\ w(z,0) = e^{-z^2}, & -\infty < z < +\infty. \end{cases} \tag{5.6}$$

Решение задачи (5.6) можно, например, записать в виде интеграла Пуассона:

$$w(z,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{(z-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \cdot e^{-\xi^2} d\xi, \text{ где } a = \frac{1}{2}.$$

Проведите вычисление этого интеграла! $w(z,t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot \exp\left\{ -\frac{z^2}{t+1} \right\}$. (Этот результат можно получить и при помощи приёма, указанного в решении задачи 5. При этом надо учесть, что $a \neq 1$.)

Возвращаясь к исходной задаче, получаем её ответ: $u(M,t) = \frac{t}{8} + \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot \exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{t+1} \right\}$.#

Задачи для самостоятельного решения.

1.5.1. $M = M(x,y,z) \in R^3$, $u = u(M,t)$;

$u_t = \Delta_M u$ в R^3 при $t > 0$;

$u(M,0) = \cos(x + y + z)$ при $M \in R^3$.

1.5.2. $M = M(x,y) \in R^2$, $u = u(M,t)$;

$$u_t = \frac{1}{2} \cdot \Delta_M u + t \cdot \sin x \cdot \cos y \text{ в } R^2 \text{ при } t > 0;$$

$$u(M,0) = x \cdot y \text{ при } M \in R^2.$$

1.5.3. $M = M(x,y) \in R^2$, $u = u(M,t)$;

$$u_t = \frac{1}{2} \cdot \Delta_M u + \sin t \cdot \sin x \cdot \sin y \quad \text{в} \quad R^2 \quad \text{при}$$

$t > 0$;

$$u(M,0) = 1 \text{ при } M \in R^2.$$

1.5.4. $M = M(x,y,z) \in R^3$, $u = u(M,t)$;

$$u_t = 2 \cdot \Delta_M u + t \cdot \cos x \text{ в } R^3 \text{ при } t > 0;$$

$$u(M,0) = \cos y \cdot \cos z \text{ при } M \in R^3.$$

Тема 2.

Уравнение колебаний в случае нескольких пространственных переменных.

2.1. Задачи Коши для уравнения колебаний в пространстве и на плоскости.

Задача Коши для уравнения колебаний в пространстве состоит в нахождении функции $u = u(M,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u + f(M,t) \text{ при } M \in R^3,\ 0 < t < +\infty, \quad (1.1)$$

и начальным условиям

$$u(M,0) = \varphi(M),\ u_t(M,0) = \psi(M) \text{ при } M \in R^3. \quad (1.2)$$

В этой задаче следует задавать два начальных условия; это объясняется тем, что в пространстве всех независимых переменных гиперповерхность $t = 0$, на которой заданы данные Коши, не является характеристической.

Классическим решением задачи Коши для уравнения колебаний называют функцию $u(M,t)\in C^1(M\in R^3, 0\le t<+\infty)\cap C^2(M\in R^3, 0<t<+\infty)$, удовлетворяющую условиям (1.1), (1.2), которая вместе с производной u_t непрерывно примыкает к начальным данным при $t\to 0+0$. При этом необходимо $f\in C(M\in R^3, 0<t<+\infty)$, $\varphi\in C^1(M\in R^3)$, $\psi\in C(M\in R^3)$.

Как и в задаче Коши с одной пространственной переменной, постоянная $a>0$ является величиной скорости распространения волн в пространстве. Покажем это на примере задачи (1.1), (1.2) в случае её сферической симметрии: $\varphi=\varphi(r)$, $\psi=\psi(r)$, $f=f(r,t)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Решение такой задачи в каждый момент времени также должно быть сферически симметричным: $u=u(r,t)$. В сферической системе координат в случае сферической симметрии оператор Лапласа имеет вид $\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\equiv\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$. Поэтому

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+f(r,t) \quad при \quad r>0, \quad t>0; \\ u(r,0)=\varphi(r), \quad u_t(r,0)=\psi(r) \quad при \quad r\ge 0; \\ |u(r,t)|<const \quad при \quad 0\le r\le r_0, \quad t\ge 0. \end{cases}$$

Положим $v(r,t)=r\cdot u(r,t)$, тогда для функции $v(r,t)$ получим задачу на луче $r\ge 0$:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot v_{rr} + r \cdot f(r,t) & при \quad r>0, \quad t>0; \\ v(r,0) = r \cdot \varphi(r), \quad v_t(r,0) = r \cdot \psi(r) & при \quad r \geq 0; \\ v(0,t) = 0 \quad при \quad t \geq 0; \end{cases}$$

здесь $v(0,t)=0$, т.к. $\lim\limits_{r\to 0+0}(r \cdot u(r,t)) = 0$ в силу ограниченности u в окрестности точки $r=0$. Решение $v(r,t)$ строится методом продолжения на всю прямую $-\infty < r < +\infty$ (по формуле Даламбера) и представляет собой волны, распространяющиеся вдоль луча $0 \leq r < +\infty$ вправо и влево со скоростью a. Им соответствуют сферические волны в пространстве: расходящаяся из точки $r=0$ в бесконечность и сходящаяся в эту точку из бесконечности. Отметим, что $u(r,t) = \dfrac{v(r,t)}{r}$, поэтому распространяющиеся в пространстве сферические волны убывают на бесконечности как $\dfrac{1}{r}$.

Частным случаем задачи (1.1), (1.2) является задача о цилиндрических волнах. Пусть данные в (1.1), (1.2) не зависят от переменной z в $Oxyz$: $f = f(x,y,t)$, $\varphi = \varphi(x,y)$, $\psi = \psi(x,y)$; тогда и решение $u = u(x,y,t)$. Такую задачу можно рассматривать как задачу Коши на плоскости Oxy, но будем одновременно считать, что она поставлена в пространственных переменных x, y, z с данными, которые не зависят от z. Тогда задача (1.1), (1.2) описывает распространение цилиндрических волн в $Oxyz$, форма которых не зависит от координаты z:

$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u + f(M,t)$ при $M \in R^2$, $0 < t < +\infty$; (1.3)

$$u(M,0)=\varphi(M),\ u_t(M,0)=\psi(M) \text{ при } M\in R^2. \quad (1.4)$$

В задаче (1.3), (1.4) каждая точка $M\in R^2$ может рассматриваться ещё и как прямая линия в $Oxyz$, параллельная оси Oz и проходящая через эту точку.

Решение задачи (1.1), (1.2) в общем виде даётся следующей теоремой [2].

Теорема 2.1.

Пусть $f\in C^2(M\in R^3, 0\le t<+\infty)$, $\varphi\in C^3(M\in R^3)$, $\psi\in C^2(M\in R^3)$. Тогда классическое решение задачи (1.1), (1.2) существует, единственно и выражается формулой Кирхгофа: $u(M,t)=$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_M^{at}}\varphi(P)dS_P\right]+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_M^{at}}\psi(P)dS_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{B_M^{at}}\frac{f\left(P,t-\dfrac{R_{MP}}{a}\right)}{R_{MP}}dV_P. \quad (1.5)$$

Здесь B_M^{at} – замкнутый шар в R^3 с центром в точке M радиуса at, S_M^{at} – его граница, dS_P – элемент площади поверхности сферы, dV_P – элемент объёма, $R_{MP}=\left[(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2+(z_M-z_P)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ – расстояние между точками M и P. #

Из формулы (1.5) вытекает при $0\le t\le T$ устойчивость задачи (1.1), (1.2) по отношению к возмущениям функций φ, ψ, f. Тем самым задача (1.1), (1.2) корректна.

В пространстве четырех переменных x_P, y_P, z_P, t поверхность $R_{MP}^2 = a^2 \cdot (t - t_0)^2$ является характеристикой уравнения колебаний; это конус в четырехмерном пространстве с вершиной (M, t_0). Если в этом четырехмерном пространстве точка (M, t_0) фиксирована, то условие

$$R_{MP} = a \cdot (t_0 - t), \quad t < t_0, \tag{1.6}$$

определяет те точки $P \in R^3$, из которых волна, вышедшая в момент времени t, достигнет точки M в момент времени t_0. Условие

$$R_{MP} = a \cdot (t - t_0), \quad t > t_0 \tag{1.7}$$

определяет те точки $P \in R^3$, для которых волна, вышедшая в момент времени t_0 из точки M, достигнет точки P в момент времени t. Если t и t_0 фиксировать, то условия (1.6) и (1.7) определяют сферы в R^3.

Решение задачи (1.3), (1.4) в общем виде даётся следующей теоремой [2].

Теорема 2.2.

Пусть $f \in C^2(M \in R^2, 0 \le t < +\infty)$, $\varphi \in C^3(M \in R^2)$, $\psi \in C^2(M \in R^2)$. Тогда классическое решение задачи (1.3), (1.4) существует, единственно и выражается формулой Пуассона: $u(M,t) =$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_M^{at}} \frac{\varphi(P)dD_P}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}}\right] + \frac{1}{2\pi a}\iint_{D_M^{at}} \frac{\psi(P)dD_P}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}} +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_M^{a(t-\tau)}} \frac{f(P,\tau)dD_P}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - R_{MP}^2}}\right] d\tau. \tag{1.8}$$

Здесь D_M^{at}, $D_M^{a(t-\tau)}$ – замкнутые круги в R^2 с центрами в точке M радиусов at и $a(t-\tau)$ соответственно, dD_P – элемент площади круга, $R_{MP}=\left[(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ – расстояние между точками M и P. #

Из формулы (1.8) вытекает при $0\le t\le T$ устойчивость задачи (1.3), (1.4) по отношению к возмущениям функций φ, ψ, f. Тем самым задача (1.3), (1.4) корректна.

Формулу (1.8) можно вывести из формулы (1.5). Если в (1.5) функции φ, ψ, f, u не зависят от переменной z, то в (1.5) от интегрирования по поверхности сферы S_M^{at} $(M\in Oxy)$ можно перейти к интегрированию по проекции этой сферы на плоскость Oxy, т.е. по кругу D_M^{at}. При этом на D_M^{at} будут проектироваться верхняя и нижняя полусферы, поэтому надо учесть множитель 2 при переходе от интеграла по S_M^{at} к интегралу по D_M^{at}. Элемент dS_P поверхности сферы выражается через его проекцию dD_P на Oxy и через косинус угла $\delta=\delta(\vec{n}_P, Oz)$ между внешней нормалью $\vec{n}_P$ к S_M^{at} в точке P и положительным направлением оси Oz: $dS_P=\dfrac{dD_P}{\cos\delta}=\dfrac{at\cdot dD_P}{\sqrt{a^2t^2-(x_P-x_M)^2-(y_P-y_M)^2}}$. Отсюда из первых двух слагаемых в (1.5) получаем соответствующие слагаемые в (1.8). Совершенно аналогично из третьего слагаемого в (1.5) получим третье слагаемое в

(1.8), если вспомним, что

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{B_M^{at}}\frac{f\left(P,t-\frac{R_{MP}}{a}\right)}{R_{MP}}dV_P=$$

$$=\int\limits_0^t\left[\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint\limits_{S_M^{a(t-\tau)}}f(P,\tau)dS_P\right]d\tau;$$

здесь $\tau=t-\frac{R_{MP}}{a}$, т.е. $R_{MP}=a(t-\tau)$,

$dV_P=dS_P\cdot a\cdot d\tau$.

Другой частный случай задачи (1.1), (1.2) – задача о плоских волнах. Пусть данные в (1.1), (1.2) не зависят от переменных y и z в $Oxyz$: $f=f(x,t)$, $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(x)$; тогда и решение $u=u(x,t)$. Такую задачу можно рассматривать как задачу Коши на прямой Ox, но будем одновременно считать, что она поставлена в пространственных переменных x, y, z с данными, которые не зависят от y и z. Тогда задача (1.1), (1.2) описывает распространение плоских волн в $Oxyz$, форма которых не зависит от координат y и z:

$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u+f(M,t)$ при $M\in R^1$, $0<t<+\infty$; (1.9)

$u(M,0)=\varphi(x)$, $u_t(M,0)=\psi(x)$ при $M\in R^1$. (1.10)

В задаче (1.9), (1.10) каждая точка $M\in R^1$ может рассматриваться ещё и как плоскость в $Oxyz$, параллельная Oyz и проходящая через эту точку.

Решение задачи (1.9), (1.10) в общем виде даётся следующей теоремой [1,2].

Теорема 2.3.

Пусть $f \in C\left(M \in R^1, 0 \le t < +\infty\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in C\left(M \in R^1, 0 \le t < +\infty\right)$, $\varphi \in C^2\left(M \in R^1\right)$, $\psi \in C^1\left(M \in R^1\right)$. Тогда классическое решение задачи (1.9), (1.10) существует, единственно и выражается формулой Даламбера: $u(M,t) =$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau. \qquad (1.11)$$

Здесь $M = M(x) \in R^1$.#

Из формулы (1.11) вытекает при $0 \le t \le T$ устойчивость задачи (1.9), (1.10) по отношению к возмущениям функций φ, ψ, f. Тем самым задача (1.9), (1.10) корректна.

Если $f \in C^2\left(M \in R^1, 0 \le t < +\infty\right)$, $\varphi \in C^3\left(M \in R^1\right)$, $\psi \in C^2\left(M \in R^1\right)$, то формулу (1.11) можно вывести из формулы (1.8). Пусть в (1.8) $M = M(x,0) \in Oxy$, $P = P(\xi, y) \in Oxy$, $R_{MP}^2 = (\xi - x)^2 + y^2$. Тогда для произвольной функции $\chi(P)$, которая зависит только от ξ, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_M^{at}} \frac{\chi(P)dD_P}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}} =$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\chi(\xi)\left[\int\limits_{-\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}}^{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-y^2}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\chi(\xi)\cdot\pi\cdot d\xi.$$

Остается учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right]=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

Формулу (1.11) можно вывести и из формулы (1.5) без обращения к формуле (1.8).

Задача 1. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y,z)\in R^3$;

$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u$ при $M\in R^3$, $0<t<+\infty$;

$$u(M,0)=\begin{cases}1-r^2, & \textit{если}\quad 0\le r\le 1;\\ 0, & \textit{если}\quad r\ge 1;\end{cases}\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$u_t(M,0)=0$ при $M\in R^3$.

Найти $u(M,t)$. Построить график функции $u(M,t)\big|_{r=3}$.

Решение. Очевидно, что $u=u(r,t)$. В случае сферической симметрии $\Delta u=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(r\cdot u)}{\partial r^2}$. Положим $v(r,t)=r\cdot u(r,t)$. Тогда функция $v(r,t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot v_{rr}, & 0 < r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty; \\ v(r,0) = \begin{cases} r - r^3, & 0 \le r \le 1; \\ 0, & r \ge 1; \end{cases} \\ v_t(r,0) = 0, & 0 \le r < +\infty; \\ v(0,t) = 0, & 0 \le t < +\infty; \end{cases}$$

здесь $v(0,t) = 0$, поскольку $|u(0,t)| < const$.

Нечетно продолжая начальные данные на луч $-\infty < r < 0$, приходим к задаче Коши на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot v_{rr}, & -\infty < r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty; \\ v(r,0) = \begin{cases} r - r^3, & -1 \le r \le 1; \\ 0, & |r| \ge 1; \end{cases} \\ v_t(r,0) = 0, & -\infty < r < +\infty; \end{cases}$$

(Постройте график $v(r,0)$!)

Для построения решения по формуле Даламбера используем фазовую плоскость Ort и характеристики $r - at = -1$, $r - at = 1$, $r + at = 1$ на ней. Тогда при $r \ge 0$ получаем решение исходной задачи.

Если $r + at < 1$, то $v(r,t) = r - r^3 - 3a^2t^2 \cdot r$, т.е. $u(r,t) = 1 - r^2 - 3a^2t^2$. В частности, при $t = 0$ и при $0 \le r \le 1$ имеем $u(r,0) = 1 - r^2$.

Если $r - at > 1$, то $v(r,t) = 0$, т.е. $u(r,t) = 0$.

Если $\begin{cases} -1 < r - at < 1 \\ r + at > 1, \end{cases}$ то

$v(r,t) = \frac{1}{2}\left[(r-at) - (r-at)^3\right]$ – волна, бегущая слева направо; т.е. $u(r,t) = \frac{(r-at)}{2r}\left[1 - (r-at)^2\right]$ – сферическая волна, убегающая в бесконечность.

Если $r - at < -1$, то $v(r,t) = 0$, т.е. $u(r,t) = 0$.

Теперь при фиксированном $r = 3$ получаем

$$u(r=3,t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le t \le \frac{2}{a}; \\ \frac{(3-at)}{6}\left[1-(3-at)^2\right], \quad \frac{2}{a} \le t \le \frac{4}{a}; \\ 0, \quad t \ge \frac{4}{a}. \end{cases}$$

(Постройте график функции $u(r=3,t)$ при $t \ge 0$!)

Построенное решение не является классическим: оно не обладает гладкостью на переднем фронте и на заднем фронте распространяющейся волны. #

Задача 2. $u = u(M,t)$, $M = M(x,y,z) \in R^3$;

$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u$ при $M \in R^3$, $0 < t < +\infty$;

$u(M,0) = 0$ при $M \in R^3$;

$$u_t(M,0)=\begin{cases} w_0=const, & \text{если} \quad 0\le r\le 1; \\ 0, & \text{если} \quad r>1; \end{cases} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Найти $u(M,t)$. Построить график функции $u(M,t)\big|_{r=2}$.

Решение. Очевидно, что $u=u(r,t)$. Положим $v(r,t)=r\cdot u(r,t)$. Тогда функция $v(r,t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2\cdot v_{rr}, \quad 0<r<+\infty, \quad 0<t<+\infty; \\ v(r,0)=0, \quad 0\le r<+\infty; \\ v_t(r,0)=\begin{cases} w_0\cdot r, & 0\le r\le 1; \\ 0, & r>1; \end{cases} \\ v(0,t)=0, \quad 0\le t<+\infty. \end{cases}$$

Нечетно продолжая начальные данные на луч $-\infty<r<0$, приходим к задаче Коши на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2\cdot v_{rr}, \quad -\infty<r<+\infty, \quad 0<t<+\infty; \\ v(r,0)=0, \quad -\infty<r<+\infty; \\ v_t(r,0)=\begin{cases} w_0\cdot r, & -1\le r<1; \\ 0, & |r|>1; \end{cases} \end{cases}$$

(Постройте график $v_t(r,0)$!)

Для построения решения по формуле Даламбера используем фазовую плоскость Ort и характеристики

$r - at = -1$, $r - at = 1$, $r + at = 1$ на ней. Тогда при $r \ge 0$ получаем решение исходной задачи.

Если $r + at < 1$, то $v(r,t) = w_0 rt$, т.е. $u(r,t) = w_0 t$.

Если $r - at > 1$, то $v(r,t) = 0$, т.е. $u(r,t) = 0$.

Если $\begin{cases} -1 < r - at < 1 \\ r + at > 1, \end{cases}$ то

$v(r,t) = \dfrac{w_0}{4a}\left[1 - (r - at)^2\right]$ – волна, бегущая слева направо; т.е. $u(r,t) = \dfrac{w_0}{4ar}\left[1 - (r - at)^2\right]$ – сферическая волна, убегающая в бесконечность.

Если $r - at < -1$, то $v(r,t) = 0$, т.е. $u(r,t) = 0$.

Теперь при фиксированном $r = 2$ получаем

$$u(r = 2, t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{a}; \\ \dfrac{w_0}{8a}\left[1 - (2 - at)^2\right], \quad \dfrac{1}{a} \le t \le \dfrac{3}{a}; \\ 0, \quad t \ge \dfrac{3}{a}. \end{cases}$$

(Постройте график функции $u(r = 2, t)$ при $t \ge 0$!)

Построенное решение не является классическим: оно не обладает гладкостью на переднем фронте и на заднем фронте распространяющейся волны. #

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) для неоднородного уравнения в некоторых случаях можно найти подбобором. Рассмотрим, например, класс функций вида $u(x,y,z,t)=e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta y)\cdot\cos(\gamma z)\cdot Q_n(t)$, где α, β, γ – постоянные, $Q_n(t)$ – многочлен степени n. Если к такой функции применить оператор $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_{x,y,z}u$ (здесь $a=1$), то получим $e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta y)\cdot\cos(\gamma z)\cdot U(t)$, где $U(t)$ – новый многочлен, степень которого не превышает n (проверьте!).

Задача 3. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y,z)\in R^3$;

$u_{tt}=\Delta_M u+t\cdot e^{5x}\cdot\sin(3y)\cdot\cos(4z)$ в R^3 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=e^{6x+8y}\cdot\cos(10z)$ при $M\in R^3$;

$u_t(M,0)=e^{3y+4z}\cdot\sin(5x)$ при $M\in R^3$.

Решение. Положим $u(M,t)=v(M,t)+w(M,t)$, где функции v и w удовлетворяют следующим задачам:

$$\begin{cases} v_{tt}=\Delta_M v+t\cdot e^{5x}\cdot\sin(3y)\cdot\cos(4z); \\ v(M,0)=0, \quad v_t(M,0)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt}=\Delta_M w; \\ w(M,0)=e^{6x+8y}\cdot\cos(10z), \quad w_t(M,0)=e^{3y+4z}\cdot\sin(5x). \end{cases}$$

Коэффициенты $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=4$ позволяют подобрать решение $v(M,t)=\frac{t^3}{6}\cdot e^{5x}\cdot\sin(3y)\cdot\cos(4z)$, т.к. в этом случае $\Delta_{x,y,z}\left(e^{5x}\cdot\sin(3y)\cdot\cos(4z)\right)=0$ (проверьте!).

Для нахождения $w(M,t)$ заметим, что
$\Delta_{x,y,z}\left(e^{6x+8y}\cdot\cos(10z)\right)=0$ и $\Delta_{x,y,z}\left(e^{3y+4z}\cdot\sin(5x)\right)=0$
(проверьте!). Отсюда
$w(M,t)=e^{6x+8y}\cdot\cos(10z)+t\cdot e^{3y+4z}\cdot\sin(5x)$.#

Задача 4. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y,z)\in R^3$;

$u_{tt}=\Delta_M u+2$ в R^3 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=x+z$ при $M\in R^3$;

$u_t(M,0)=y+z$ при $M\in R^3$.

Ответ: $u(M,t)=x+ty+(t+1)z+t^2$.#

Задача 5. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)\in R^2$;

$u_{tt}=\Delta_M u+2$ в R^2 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=x$ при $M\in R^2$;

$u_t(M,0)=y$ при $M\in R^2$.

Ответ: $u(M,t)=x+ty+t^2$.#

Задача 6. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)\in R^2$;

$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u$ в R^2 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=\sin(3x+4y)$ при $M\in R^2$;

$u_t(M,0)=\cos(3x+4y)$ при $M\in R^2$.

Решение. Положим $u(M,t)=v(M,t)+w(M,t)$, где функции v и w удовлетворяют следующим задачам:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M v; \\ v(M,0) = \sin(3x+4y), \quad v_t(M,0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M w; \\ w(M,0) = 0, \quad w_t(M,0) = \cos(3x+4y). \end{cases}$$

Положим $v(M,t) = \varphi(t) \cdot \sin(3x+4y)$, а для выполнения начальных условий потребуем $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$. Из уравнения получаем

$$\varphi''(t) \cdot \sin(3x+4y) = -a^2 \cdot 25 \cdot \varphi(t) \cdot \sin(3x+4y).$$

Для нахождения функции $\varphi(t)$ имеем задачу

$$\begin{cases} \varphi''(t) + 25a^2\varphi(t) = 0, \quad t > 0; \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\varphi(t) = \cos(5at)$.

Положим $w(M,t) = \psi(t) \cdot \cos(3x+4y)$, а для выполнения начальных условий потребуем $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$. Из уравнения получаем

$$\psi''(t) \cdot \cos(3x+4y) = -a^2 \cdot 25 \cdot \psi(t) \cdot \cos(3x+4y).$$

Для нахождения функции $\psi(t)$ имеем задачу

$$\begin{cases} \psi''(t) + 25a^2\psi(t) = 0, \quad t > 0; \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\psi(t) = \dfrac{1}{5a} \cdot \sin(5at)$.#

Задачи для самостоятельного решения.

2.1.1. Пусть функция g одной независимой переменной дважды непрерывно дифференцируема. Доказать, что функции $U_1(r,t)=\frac{1}{r}\cdot g\left(t-\frac{r}{a}\right)$ и $U_2(r,t)=\frac{1}{r}\cdot g\left(t+\frac{r}{a}\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, удовлетворяют уравнению колебаний $u_{tt}=a^2\cdot\Delta u$ в R^3.

2.1.2. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y,z)\in R^3$;

$u_{tt}=\Delta_M u+2xyz$ в R^3 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=x^2+y^2-2z^2$, $u_t(M,0)=1$ при $M\in R^3$.

2.1.3. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y,z)\in R^3$;

$u_{tt}=8\cdot\Delta_M u+t^2x^2$ в R^3 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=y^2$, $u_t(M,0)=z^2$ при $M\in R^3$.

2.1.4. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)\in R^2$;

$u_{tt}=\Delta_M u+t\cdot\sin y$ в R^2 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=x^2$, $u_t(M,0)=\sin y$ при $M\in R^2$.

2.1.5. $u=u(M,t)$, $M=M(x,y)\in R^2$;

$u_{tt}=\Delta_M u+6xyt$ в R^2 при $0<t<+\infty$;

$u(M,0)=x^2-y^2$, $u_t(M,0)=xy$ при $M\in R^2$.

2.1.6. Пусть функция $u(M,t)$ является решением задачи $u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u$, $u(M,0)=\varphi(M)$, $u_t(M,0)=0$

а) на плоскости: $M\in R^2$; б) в пространстве: $M\in R^3$.

Доказать, что функция $v(M,t)=\int\limits_0^t u(M,\tau)d\tau$ является решением задачи $v_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M v$, $v(M,0) = 0$, $v_t(M,0) = \varphi(M)$.

2.1.7. Пусть функция $u(M,t;t_0)$ при каждом фиксированном $t_0 \geq 0$ является решением задачи $u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u$, $u(M,t_0) = 0$, $u_t(M,t_0) = f(M,t_0)$

а) на плоскости: $M \in R^2$; б) в пространстве: $M \in R^3$.

Доказать, что функция $v(M,t;t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} u(M,t;\tau)d\tau$ является решением задачи $v_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M v + f(M,t)$, $v(M,t_0) = 0$, $v_t(M,t_0) = 0$.

2.1.8. В задаче Коши о свободных колебаниях в R^3 начальные данные равны нулю вне шара радиуса r_0 с центром в точке O. Найти множество зависимости решения от значений начальных данных в этом шаре.

2.1.9. В задаче Коши о свободных колебаниях в R^2 начальные данные равны нулю вне круга радиуса r_0 с центром в точке O. Найти множество зависимости решения от значений начальных данных в этом круге.

2.2. Решение задач для уравнения колебаний в ограниченных областях методом разделения переменных, не требующих применения специальных функций.

Разделяя в уравнении колебаний пространственные переменные M и время t, для функции $T(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Задача 1. Поставить задачу о свободных поперечных колебаниях однородной прямоугольной мембраны $\overline{D}=\{0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}\subset R^2$ с закрепленными краями, если известно её начальное поперечное отклонение $\varphi(x,y)$ и распределение начальной поперечной скорости $\psi(x,y)$. Решить эту задачу в случае $\varphi(x,y)\equiv 0$, $\psi(x,y)\equiv v_0=const\ne 0$.

Решение. $M=M(x,y)\in R^2$. Искомая функция $u=u(M,t)$ имеет смысл смещения в направлении оси Oz в пространстве $Oxyz$ в точке M в момент времени t; смещение отсчитывается от плоскости Oxy. Если колебания мембраны происходят только под действием сил упругости, то их называют свободными – внешние силы не действуют на мембрану; тогда $u(M,t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний.

$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u$ в D при $0<t<+\infty$;

$u(M,t)\big|_{M\in S}=0$ при $0\le t<+\infty$ (S – граница области $\overline{D}$);

$u(M,0)=\varphi(M)$, $\qquad u_t(M,0)=\psi(M)$ при $M\in D$.

Найдем нетривиальные частные решения однородного уравнения колебаний, которые имеют вид $u(M,t)=V(M)\cdot T(t)$ и удовлетворяют краевому условию $u\big|_S=0$. Как и в задачах на отрезке, получаем

$$\frac{\Delta V(M)}{V(M)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda=const.$$

Отсюда $T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$ и

$$\begin{cases}\Delta V(M)+\lambda V(M)=0, \quad M\in D;\\ V(M)\big|_{M\in S}=0.\end{cases}$$

В задаче Штурма-Лиувилля (относительно функции $V(M)$) тоже разделим переменные: положим $V(M)=X(x)\cdot Y(y)$. Тогда для функций $X(x)$ и $Y(y)$ получаем задачи Штурма-Лиувилля на отрезках (см. раздел 1.1). Их решения: $\alpha_m=\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2$, $X_m(x)=\sin\frac{\pi mx}{l_1}$;

$\beta_n=\left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2$, $Y_n(y)=\sin\frac{\pi ny}{l_2}$; здесь индексы m, n независимо друг от друга пробегают все натуральные числа. Решение задачи Штурма-Лиувилля в прямоугольнике $\overline{D}$ имеет вид $\lambda_{m,n}=\alpha_m+\beta_n=\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2$,

$$V_{m,n}(M)=\sin\frac{\pi mx}{l_1}\cdot\sin\frac{\pi ny}{l_2}.$$

Решение исходной начально-краевой задачи для уравнения колебаний надо искать в виде $u(M,t)=$ $=\sum\limits_{m,n}\left[A_{m,n}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_{m,n}}at\right)+B_{m,n}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_{m,n}}at\right)\right]\cdot V_{m,n}(M).$

Коэффициенты $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ можно найти из начальных условий.

В случае $\varphi(M) \equiv 0$ все $A_{m,n} = 0$. В случае $\psi(M) = v_0$ имеем

$$B_{m,n} = \frac{4}{\sqrt{\lambda_{m,n}}\, a l_1 l_2} \iint_D v_0 \cdot V_{m,n}(M) dxdy =$$

$$= \frac{4v_0 \left[1-(-1)^m\right] \cdot \left[1-(-1)^n\right]}{\pi^3 \sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_2}\right)^2} \cdot mn \cdot a}.$$

Величины $\omega_{m,n} = \sqrt{\lambda_{m,n}} \cdot a$ являются собственными частотами колебаний мембраны. Если одно и то же собственное значение λ может быть получено при разных наборах индексов (m,n), то на одной и той же собственной частоте возможны разные собственные колебания. #

Задача 2.

$M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\} \subset R^2$;

$u = u(M,t)$;

$u_{tt} = \Delta_M u$ в D при $0 < t < +\infty$;

$u(M,t)\big|_{M \in S} = 0$ при $0 \le t < +\infty$ (S – граница области $\overline{D}$);

$u(M,0) = 7 \cdot \sin(2x) \cdot \sin(3y)$,

$u_t(M,0) = 10 \cdot \sin x \cdot \sin(2y)$ при $M \in \overline{D}$.

Решение. Разделяя переменные x, y и время t, получаем уравнение $T''(t)+\lambda T(t)=0$ и задачу Штурма-Лиувилля в квадрате $\overline{D}$ относительно функции $V(M)$. Полагая $V(M)=X(x)\cdot Y(y)$, получим задачи Штурма-Лиувилля на отрезках относительно функций $X(x)$ и $Y(y)$. Их решения: $\alpha_m=m^2$, $X_m(x)=\sin(mx)$; $\beta_n=n^2$, $Y_n(y)=\sin(ny)$; здесь m и n – независимые натуральные индексы. Отсюда $\lambda_{m,n}=m^2+n^2$, $V_{m,n}(M)=\sin(mx)\cdot\sin(ny)$. Решение исходной задачи надо искать в виде $u(M,t)=\sum\limits_{m,n}\Big(A_{m,n}\cdot\cos\left(\sqrt{m^2+n^2}t\right)+$ $+B_{m,n}\cdot\sin\left(\sqrt{m^2+n^2}t\right)\Big)\cdot\sin(mx)\cdot\sin(ny)$. Из начальных условий ясно, что $A_{2,3}=7$, а все остальные $A_{m,n}=0$; $B_{1,2}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$, а все остальные $B_{m,n}=0$.

Ответ: $u(M,t)=7\cos\left(\sqrt{13}t\right)\cdot\sin(2x)\cdot\sin(3y)+$
$+2\sqrt{5}\sin\left(\sqrt{5}t\right)\cdot\sin x\cdot\sin(2y)$.#

Задача 3.

$M=M(x,y)\in\overline{D}=\{0\le x\le\pi,\,0\le y\le\pi\}\subset R^2$;

$u=u(M,t)$;

$u_{tt}=\Delta_M u+\sin t\cdot\cos x\cdot\cos y$ в D при $0<t<+\infty$;

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$u(M,0)=0, \quad u_t(M,0)=0 \text{ при } M \in \overline{D}.$$

Решение. Нулевые краевые условия 2-го рода на границе квадрата $\overline{D}$ называют условиями свободной границы (в физической интерпретации они означают, что на границу не действуют внешние силы). Прежде чем решать задачу для неоднородного уравнения колебаний, разделим переменные в однородном уравнении и учтем поставленные краевые условия 2-го рода: $u(M,t)=V(M)\cdot T(t)$, где $V(M)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta V(M)+\lambda V(M)=0, & M\in D; \\ V_x\big|_{x=0} = V_x\big|_{x=\pi} = V_y\big|_{y=0} = V_y\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи Штурма-Лиувилля в $\overline{D}$ получим, разделяя в ней переменные x и y. Это решение имеет вид $\quad \lambda_{m,n}=m^2+n^2, \quad V_{m,n}(M)=\cos(mx)\cdot\cos(ny)$, $m=0,1,2,\ldots$, $n=0,1,2,\ldots$; в частности, $\lambda_{0,0}=0$, $V_{0,0}(M)\equiv 1$.

Решение исходной начально-краевой задачи надо искать в виде ряда Фурье по системе функций $\{V_{m,n}(M)\}$:

$$u(M,t)=\sum_{m,n} T_{m,n}(t)\cdot V_{m,n}(M).$$

Чтобы найти коэффициенты $T_{m,n}(t)$, надо подставить этот функциональный ряд в неоднородное уравнение колебаний и в начальные условия. Тогда при каждом наборе индексов (m,n) получим для нахождения $T_{m,n}(t)$ задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Но в данной задаче очевидно, что решение надо искать в виде $u(M,t)=T_{1,1}(t)\cdot\cos x\cdot\cos y$. Коэффициент $T_{1,1}(t)$ найдем из задачи

$$\begin{cases} T''_{1,1}(t)+2\cdot T_{1,1}(t)=\sin t, \quad t\ge 0; \\ T_{1,1}(0)=0, \quad T'_{1,1}(0)=0. \end{cases}$$

Отсюда $T_{1,1}(t)=\sin t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$.#

Задача 4.

$M=M(x,y)\in\overline{D}=\{0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}\subset R^2$;

$u=u(M,t)$;

$$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$$u(0,y,t)=\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right), \qquad u(l_1,y,t)=0 \quad \text{при}$$

$0\le y\le l_2,\ t>0$;

$$u(x,0,t)=0,\ u(x,l_2,t)=0 \text{ при } 0\le y\le l_1,\ t>0;$$

$$u(M,0)=0, \quad u_t(M,0)=0 \text{ при } M\in\overline{D}.$$

Решение. Положим $u(M,t)=v(M,t)+\left(1-\dfrac{x}{l_1}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi y}{l_2}\right)$. Тогда новая искомая функция $v(M,t)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$v_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M v - a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right);$$

$v(M,t)\big|_{M \in S} = 0$ при $t > 0$ (S – граница области $\overline{D}$;

$v(M,0) = \left(\dfrac{x}{l_1} - 1\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi y}{l_2}\right)$, $v_t(M,0) = 0$ при $M \in \overline{D}$.

Представим $v(M,t)$ в виде $v(M,t) = U(M,t) + W(M,t)$, где

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M U; \quad U(M,t)\big|_{M \in S} = 0; \\ U(M,0) = \left(\dfrac{x}{l_1} - 1\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi y}{l_2}\right), \quad U_t(M,0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M W + \left(\dfrac{a\pi}{l_2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x}{l_1} - 1\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi y}{l_2}\right); \\ W(M,t)\big|_{M \in S} = 0; \quad W(M,0) = 0, \quad W_t(M,0) = 0. \end{cases}$$

Функции U и W разложим в ряды Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля в $\overline{D}$:

$$V_{m,n}(M) = \sin\frac{\pi m x}{l_1} \cdot \sin\frac{\pi n y}{l_2}, \quad \lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2,$$

$m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $U(M,t) =$

$$= \sum_{m,n} \left[A_{m,n} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_{m,n}}\, at\right) + B_{m,n} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_{m,n}}\, at\right)\right] \cdot V_{m,n}(M),$$

где все коэффициенты $B_{m,n}=0$, а коэффициенты $A_{m,n}$ найдем из разложения $U(M,0)$ в ряд Фурье по системе $\{V_{m,n}(M)\}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{l_1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi ny}{l_2}\right)=\left(\frac{x}{l_1}-1\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right).$$

Очевидно, что при $n\neq 1$ все $A_{m,n}=0$;

$$A_{m,1}=\frac{2}{l_1}\int_0^{l_1}\left(\frac{x}{l_1}-1\right)\sin\left(\frac{\pi mx}{l_1}\right)dx=-\frac{2}{\pi m}\text{ (проверьте!).}$$

Итак,

$$U(M,t)=-\frac{2}{\pi}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cos\left(\sqrt{\lambda_{m,1}}at\right)\sin\left(\frac{\pi mx}{l_1}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right).$$

Функцию W надо искать в виде $W(M,t)=\sum_{m,n}T_{m,n}(t)\cdot V_{m,n}(M)$, подставляя этот ряд в неоднородное уравнение и в начальные условия. Тогда при $n\neq 1$ получим $T_{m,n}(t)=0$, а $T_{m,1}(t)$ найдем из задач

$$\begin{cases}T''_{m,1}(t)+\lambda_{m,1}a^2T_{m,1}(t)=-\dfrac{2\pi}{m}\left(\dfrac{a}{l_2}\right)^2;\\ T_{m,1}(0)=0,\quad T'_{m,1}(0)=0.\end{cases}$$

Отсюда $T_{m,1}(t)=\dfrac{2\pi}{m\cdot l_2^2\cdot\lambda_{m,1}}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_{m,1}}\cdot at\right)-1\right)$ (проверьте!). Итак $W(M,t)=$

$$= \frac{2\pi}{l_2^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot\lambda_{m,1}}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_{m,1}}\,at\right)-1\right)\sin\left(\frac{\pi m x}{l_1}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right).$$

Ответ:

$$u(M,t)=\left[\left(1-\frac{x}{l_1}\right)-\frac{2\pi}{l_2^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot\lambda_{m,1}}\cdot\sin\left(\frac{\pi m x}{l_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{l_2^2\cdot\lambda_{m,1}}-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_{m,1}}\,at\right)}{m}\cdot\sin\left(\frac{\pi m x}{l_1}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right),$$

где $\lambda_{m,1}=\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2$.

Другой способ решения состоит в замене функции по формуле $u(M,t)=q(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$, где новая неизвестная функция удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} q_{tt}=a^2\cdot q_{xx}-\left(\frac{a\pi}{l_2}\right)^2\cdot q, \quad 0<x<l_1, \quad t>0; \\ q(0,t)=1, \quad q(l_1,t)=0, \quad t>0; \\ q(x,0)=0, \quad q_t(x,0)=0, \quad 0\le x\le l_1. \end{cases}$$

Найдите $q(x,t)$ и проверьте полученный выше ответ.#

Задача 5. $\overline{D}=\{0\le r\le r_0\}$ – шар в R^3, $M\in\overline{D}$, $u=u(M,t)$;

$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u$ при $0 \le r < r_0$, $0 < t < +\infty$;

$u(M,t)\big|_{r=r_0} = 0$ при $0 \le t < +\infty$;

$u(M,0) = 0$, $\quad u_t(M,0) = v_0 = const$ при $M \in \overline{D}$.

Решение. Очевидно, что $u = u(r,t)$. В случае сферической симметрии $\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$. Введем функцию $v(r,t) = r \cdot u(r,t)$. Тогда имеем задачу

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot v_{rr}, & 0 < r < r_0, \quad t > 0; \\ v(0,t) = 0, \quad v(r_0,t) = 0, & t \ge 0; \\ v(r,0) = 0, \quad v_t(r,0) = r \cdot v_0, & 0 \le r \le r_0. \end{cases}$$

Ответ:

$$u(r,t) = \frac{2v_0 r_0^2}{r\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n a}{r_0} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n r}{r_0}\right).\#$$

Задачи для самостоятельного решения.

2.2.1.

$M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2\} \subset R^2$,

$u = u(M,t)$;

$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u$ в D при $0 < t < +\infty$;

$u(M,t)\big|_{M \in S} = 0$ при $0 \le t < +\infty$ (S – граница области $\overline{D}$);

$u(M,0) = 0$, $u_t(M,0) = v_0 xy(l_1 - x)(l_2 - y)$ при

$M \in \overline{D}$. $v_0 = const$.

2.2.2.
$M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\} \subset R^2$,
$u = u(M,t)$;

$$u_{tt} = \Delta_M u + \cos t \cdot \cos x \cdot \cos y \quad \text{в} \quad D \quad \text{при}$$

$0 < t < +\infty$;

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$u(M,0) = 0,\ u_t(M,0) = 0 \ \text{при} \ M \in \overline{D}.$$

2.2.3.
$M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\} \subset R^2$,
$u = u(M,t)$;

$$u_{tt} = \Delta_M u + t \cdot \cos(5x) \cdot \cos(2y) \quad \text{в} \quad D \quad \text{при}$$

$0 < t < +\infty$;

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$u(M,0) = 0,\ u_t(M,0) = 0 \ \text{при} \ M \in \overline{D}.$$

2.2.4.
$M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\} \subset R^2$,
$u = u(M,t)$;

$$u_{tt} = \Delta_M u + \sin t \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin(2y) \quad \text{в} \quad D \quad \text{при}$$

$0 < t < +\infty$;

$$u_x\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$u(M,0) = 0,\ u_t(M,0) = 0 \ \text{при} \ M \in \overline{D}.$$

2.2.5.
$M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\} \subset R^2$,
$u = u(M,t)$;

$$u_{tt} = \Delta_M u + \cos t \cdot \sin\frac{3x}{2} + \sin t \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos y$$ в

D при $0 < t < +\infty$;

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi} = 0;$$

$$u(M,0) = 0,\ u_t(M,0) = 0 \text{ при } M \in \overline{D}.$$

2.3. Решение задач для уравнения колебаний в ограниченных областях методом разделения переменных, требующих применения специальных функций.

Задача 1. Решить задачу о свободных поперечных колебаниях однородной круглой мембраны $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\} \subset R^2$ с закреплённым краем.

Решение. $M = M(r,\varphi) \in \overline{D}$, $u = u(M,t)$;

$$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0 < t < +\infty;$$

$$u(M,t)\big|_{r=r_0} = 0 \text{ при } 0 < t < +\infty;$$

$$u(M,0) = p(M), \qquad u_t(M,0) = q(M)$$ при

$M \in \overline{D}$, где p и q – заданные функции.

Разделим пространственные переменные r, φ и время t: будем искать нетривиальные частные решения однородного уравнения колебаний, которые имеют вид $u(M,t) = V(M) \cdot T(t)$ и удовлетворяют краевому условию $u\big|_{r=r_0}=0$. Тогда получим уравнение $T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$ и задачу Штурма-Лиувилля в круге:

$$\begin{cases}\Delta V(M)+\lambda V(M)=0, \quad M\in D;\\ V(M)\big|_{r=r_0}=0.\end{cases} \tag{3.1}$$

Задача (3.1) подробно изучена в разделе 1.2.

Решение исходной начально-краевой задачи для уравнения колебаний в круге $\overline{D}$ надо искать в виде

$$u(M,t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}r\right)\left[A_{0,k}\cdot\cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}a}{r_0}t\right)+\right.$$

$$\left.+B_{0,k}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}a}{r_0}t\right)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\cos(n\varphi)\cdot$$

$$\cdot\left[A_{n,k}\cdot\cos\left(\frac{\mu_k^{(n)}a}{r_0}t\right)+B_{n,k}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k^{(n)}a}{r_0}t\right)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\sin(n\varphi)\cdot$$

$$\cdot\left[\widetilde{A}_{n,k}\cdot\cos\left(\frac{\mu_k^{(n)}a}{r_0}t\right)+\widetilde{B}_{n,k}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k^{(n)}a}{r_0}t\right)\right]. \tag{3.2}$$

Коэффициенты этого разложения можно найти из начальных условий. Для этого надо построить ряды Фурье функций $p(M)$ и $q(M)$ по системе $\{V_{n,k}(M)\}$ (см. раздел 1.2).#

Задача 2. $M = M(r,\varphi) \in \overline{D} =$
$= \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\} \subset R^2$, $u = u(M,t)$;
$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u$ в D при $0 < t < +\infty$;
$u(M,t)\big|_{r=r_0} = 0$ при $0 < t < +\infty$;

$$u(M,0) = u_0 \cdot \frac{r}{r_0} \cdot \cos\varphi, \qquad u_0 = const,$$

$u_t(M,0) = 0$ при $M \in \overline{D}$.

Решение. Функцию $u(M,t)$ надо искать в виде (3.2). Из условия $u_t(M,0) = 0$ следует, что все $B_{n,k} = 0$, $\widetilde{B}_{n,k} = 0$. Из условия $u(M,0) = u_0 \cdot \dfrac{r}{r_0} \cdot \cos\varphi$ ясно, что все $\widetilde{A}_{n,k} = 0$ и при $n \ne 1$ все $A_{n,k} = 0$.

Функцию r разложим в ряд Фурье-Бесселя по системе функций $\left\{ J_1\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{r_0} r \right) \right\}_{k=1}^{\infty}$ при $0 < r < r_0$. Для этого вычислим, используя формулу (2.7) темы 1, следующие интегралы:

$$I = \int_0^{r_0} r \cdot J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0} r \right) \cdot r dr = \frac{r_0^3}{\mu_k^{(1)}} \cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда $A_{1,k} = \dfrac{2}{r_0^2 \cdot \left[J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)\right]^2} \cdot \dfrac{u_0}{r_0} \cdot I = \dfrac{2u_0}{\mu_k^{(1)} \cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}$.

Ответ:

$$u(M,t)=2u_0\cos\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{(1)}\cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\mu_k^{(1)}a}{r_0}t\right).\#$$

Задача 3. Решить задачу 1 при $p(M)=u_0\cdot J_0\left(\dfrac{\mu_7^{(0)}}{r_0}r\right)$, где $u_0=const, u_0=const$, $\mu_7^{(0)}$ – седьмой положительный нуль функции $J_0(\mu)$; $q(M)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Решение. Очевидно, что $u=u(r,t)$. Кроме того, из (3.2) ясно, что решение надо искать в виде

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}r\right)\left[A_k\cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}a}{r_0}t\right)+B_k\sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}a}{r_0}t\right)\right].$$

Поскольку $q(M)\equiv 0$, все $B_k=0$. При $k\neq 7$ все $A_k=0$, $A_7=u_0$.

Ответ: $u(M,t)=u_0\cdot J_0\left(\dfrac{\mu_7^{(0)}}{r_0}r\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\mu_7^{(0)}a}{r_0}t\right).\#$

Задача 4.

$M=M(r,\varphi,z)\in\overline{D}=\{0\le r\le r_0,\ 0\le\varphi<2\pi, 0\le z\le h\}$ – цилиндр в R^3, $h=const>0$; $u=u(M,t)$;

$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u$ в D при $0<t<+\infty$;

$u(M,t)\big|_{z=0}=u(M,t)\big|_{r=r_0}=u(M,t)\big|_{z=h}=0$ при

$0 < t < +\infty$;
$u(M,0) = u_0 rz(h-z)\sin\varphi$, $u_t(M,0) = 0$ при $M \in \overline{D}$, $u_0 = const$.

Решение. Разделим пространственные переменные r, φ, z и время t в однородном уравнении колебаний: будем искать его нетривиальные частные решения вида $u(r,\varphi,z,t) = U(r,\varphi,z)\cdot T(t)$, которые удовлетворяют поставленным в задаче краевым условиям на всей поверхности цилиндра. Тогда получим уравнение $T''(t) + a^2\chi T(t) = 0$ и задачу Штурма-Лиувилля в цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta U(M) + \chi U(M) = 0, \quad M \in D; \quad \chi = const; \\ U\big|_{z=0} = U\big|_{r=r_0} = U\big|_{z=h} = 0 \end{cases}$$

(здесь оператор Лапласа ΔU следует записать в цилиндрической системе координат r, φ, z).

Разделим переменные r, φ и z: положим $U(M) = V(r,\varphi)\cdot Z(z)$; тогда получим задачи Штурма-Лиувилля в круге и на отрезке:

$$\begin{cases} \Delta_{r,\varphi} V + \lambda \cdot V = 0, \quad 0 \le r \le r_0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \\ |V(0,\varphi)| < \infty, \quad V\big|_{r=r_0} = 0; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} Z''(z) + \gamma \cdot Z(z) = 0, \quad 0 \le z \le h; \\ Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0; \end{cases} \tag{3.4}$$

причем $\lambda + \gamma = \chi$. Задача (3.4) имеет решение

$$\gamma_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \; Z_m(z) = \sin\frac{\pi m z}{h}, \; m = 1, 2, \dots .$$

В задаче (3.3) снова разделим переменные: положим $V(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. Тогда приходим к задачам на собственные значения относительно функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$ (см.(2.1), (2.2) в теме 1). Собственные значения $\lambda_k^{(n)}$ и собственные функции задачи (3.3) найдены в разделе 1.2 темы 1. Собственные значения задачи в цилиндре $\overline{D}$ имеют вид $\chi_{m,n,k} = \gamma_m + \lambda_k^{(n)}$, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$.

Решение исходной задачи для уравнения колебаний надо искать в виде следующего ряда: $u(M,t) =$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m z}{h} \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) \cdot \left[A_{m,0,k} \cdot \cos\left(\sqrt{\chi_{m,0,k}}\, at\right) +\right.$$

$$\left. + B_{m,0,k} \cdot \sin\left(\sqrt{\chi_{m,0,k}}\, at\right)\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m z}{h} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) \cdot$$

$$\cdot \cos(n\varphi) \cdot \left[A_{m,n,k} \cdot \cos\left(\sqrt{\chi_{m,n,k}}\, at\right) + B_{m,n,k} \cdot \sin\left(\sqrt{\chi_{m,n,k}}\, at\right)\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m z}{h} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) \cdot \sin(n\varphi) \cdot$$

$$\cdot \left[\widetilde{A}_{m,n,k} \cdot \cos\left(\sqrt{\chi_{m,n,k}}\, at\right) + \widetilde{B}_{m,n,k} \cdot \sin\left(\sqrt{\chi_{m,n,k}}\, at\right)\right].$$

Из начального условия $u_t(M,0) = 0$ следует, что все коэффициенты B и $\widetilde{B}$ равны нулю. Из начального условия $u(M,0)=u_0 rz(h-z)\sin\varphi$ следует, что все $A_{m,n,k}=0$ и при $n\neq 1$ все $\widetilde{A}_{m,n,k}=0$.

Найдём коэффициенты Фурье функции $z(h-z)$ по системе функций $\left\{\sin\dfrac{\pi mz}{h}\right\}_{m=1}^{\infty}$ при $0\le z\le h$:

$$\frac{2}{h}\int_0^h z(h-z)\sin\frac{\pi mz}{h}dz=\begin{cases}0, & \text{если}\quad m=2l;\\ \dfrac{8h^2}{\pi^3(2l+1)^3}, & \text{если}\\ m=2l+1, & l=0,1,2,\ldots;\end{cases}$$

(проверьте!).

Найдем коэффициенты Фурье функции r по системе функций $\left\{J_1\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ при $0<r<r_0$ (см. решение задачи 2):

$$\left\|J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)\right\|^{-2}\cdot\int_0^{r_0} r\cdot J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)\cdot rdr=\frac{2r_0}{\mu_k^{(1)}\cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}.$$

Итак, все коэффициенты $\widetilde{A}_{2l,1,k}=0$,

$$\widetilde{A}_{2l+1,1,k}=\frac{16u_0h^2r_0}{\pi^3(2l+1)^3\mu_k^{(1)}\cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}.$$

Ответ: $u(M,t)=\sin\varphi\cdot\dfrac{16u_0h^2r_0}{\pi^3}\cdot$

$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2l+1)z}{h}}{(2l+1)^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)\cos\left(\sqrt{\chi_{2l+1,1,k}}\,at\right)}{\mu_k^{(1)}\cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)},$$

где $\chi_{2l+1,1,k}=\left(\dfrac{(2l+1)\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{r_0}\right)^2$, $\mu_k^{(1)}$ – положительные нули функции $J_1(\mu)$.#

Задача 5.

$M=M(r,\varphi)\in\overline{D}=\{0\le r\le r_0,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ – круг в R^2; $u=u(M,t)$;

$$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$$u(M,t)\big|_{r=r_0}=u_0\cdot\cos(3\varphi),\ u_0=const, \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$$u(M,0)=0,\ u_t(M,0)=0 \text{ при } M\in\overline{D}.$$

Решение. Положим $u(M,t)=v(M,t)+U(M)$, где функция $U(M)$ является решением следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta U=0 \text{ в } D;\ U(M)\big|_{r=r_0}=u_0\cdot\cos(3\varphi);$$

т.е. $U(M)=u_0\cdot\dfrac{r^3}{r_0^3}\cdot\cos(3\varphi)$ (проверьте!). Тогда для функции $v(M,t)$ получаем задачу

$$v_{tt}=a^2\cdot\Delta_M v \text{ в } D \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$$v(M,t)\big|_{r=r_0}=0 \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$$v(M,0) = -u_0 \cdot \frac{r^3}{r_0^3} \cdot \cos(3\varphi), \quad v_t(M,0) = 0$$ при $M \in \overline{D}$.

Решение этой задачи надо искать в виде

$$v(M,t) = \cos(3\varphi) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} r\right) \cos\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} at\right).$$

Коэффициенты A_k найдем из начального условия; для этого разложим функцию r^3 в ряд Фурье-Бесселя по системе $\left\{J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ при $0 < r < r_0$. Вычислим сначала интегралы

$$I_k = \int_0^{r_0} r^3 \cdot J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} r\right) \cdot r dr = \frac{r_0^5}{\mu_k^{(3)}} \cdot J_4\left(\mu_k^{(3)}\right), \; k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда $A_k = -\dfrac{u_0}{r_0^3} \cdot \dfrac{I_k}{\left\| J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} r\right) \right\|^2} = -\dfrac{2u_0}{\mu_k^{(3)} \cdot J_4\left(\mu_k^{(3)}\right)}.$

Ответ:

$$u(M,t) = u_0 \cos(3\varphi) \left[\frac{r^3}{r_0^3} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} r\right)}{\mu_k^{(3)} J_4\left(\mu_k^{(3)}\right)} \cos\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{r_0} at\right) \right],$$

где $\mu_k^{(3)}$ – положительные нули функции $J_3(\mu)$.#

Задача 6.

$M = M(r,\theta,\varphi) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ – шар в R^3; $u = u(M,t)$;

$$u_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0 < t < +\infty;$$

$$u(M,t)\Big|_{r=r_0} = u_0 \cdot \cos\theta,\ u_0 = const, \text{ при } 0 \le t < +\infty;$$

$$u(M,0) = u_0 \cdot \frac{r^3}{r_0^3} \cdot \cos\theta, \qquad u_t(M,0) = 0 \text{ при } M \in \overline{D}.$$

Решение. Положим

$u(M,t) = v(M,t) + u_0 \cdot \dfrac{r^3}{r_0^3} \cdot \cos\theta$; тогда для функции $v(M,t)$ получаем следующую задачу:

$$v_{tt} = a^2 \cdot \Delta_M v + \alpha \cdot r\cos\theta,\quad \alpha = \frac{10a^2u_0}{r_0^3}, \quad \text{в } D$$

при $0 < t < +\infty$ (проверьте, вычисляя $\Delta(r^3\cos\theta)$ в сферической системе координат!);

$$v(M,t)\Big|_{r=r_0} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t < +\infty;$$

$$v(M,0) = 0,\ v_t(M,0) = 0 \text{ при } M \in \overline{D}.$$

Очевидно, что решение v не зависит от переменной φ.

Разделяя в однородном уравнении колебаний пространственные переменные и время, и учитывая краевое условие $v\Big|_{r=r_0} = 0$, получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\Delta_M V(M) + \lambda \cdot V(M) = 0 \text{ в } D;\ V(M)\Big|_{r=r_0} = 0.$$

Эта задача была подробно изучена в разделе 1.3, где показано, что каждому собственному значению $\lambda_k^{(n)} = \left(\dfrac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0} \right)^2$ соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций $V_{n,m,k}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{r_0} r \right) \cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$, где

$\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ – положительные корни уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$, $Y_n^{(m)}$ – сферические функции, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots$ (см. дополнение к разделу 1.3).

Решение $v(M,t)$ неоднородного уравнения колебаний надо искать в виде разложения его в ряд Фурье по системе функций $\{V_{n,m,k}\}$ в $\overline{D}$. Для неоднородности $\alpha \cdot r \cos\theta$ в этом разложении надо учитывать только $n=1$, $m=0$ (остальные функции $V_{n,m,k}$ при $n>1$ зависят от φ); напомним, что $Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = \mathrm{P}_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Итак, решение рассматриваемой задачи надо искать в виде $v(M,t) = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{r}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} J_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0} r \right) \cdot T_k(t)$. Чтобы найти коэффициенты $T_k(t)$, подставим это выражение в неоднородное уравнение колебаний, умножим уравнение на $\sqrt{r}$ и разделим на $\cos\theta$. Найдем коэффициенты β_k разложения функции $r\sqrt{r}$ в ряд Фурье-Бесселя по системе $\left\{ J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0} r \right) \right\}_{k=1}^{\infty}$ при $0 < r < r_0$; для этого вычислим интегралы

$$I_k = \int_0^{r_0} r\sqrt{r} \cdot J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0} r \right) \cdot r dr = \frac{r_0^{\frac{7}{2}}}{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)} \right).$$

Тогда $\beta_k = \dfrac{I_k}{\left\| J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0} r \right) \right\|^2} = \dfrac{2r_0^{\frac{3}{2}}}{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)} \right)}$. Для нахождения коэффициентов $T_k(t)$ получили задачи Коши:

$T_k''(t) + a^2 \lambda_k^{(1)} T_k(t) = \alpha \cdot \beta_k$; $T_k(0) = 0$, $T_k'(0) = 0$. Отсюда $T_k(t) = \dfrac{\alpha \cdot \beta_k}{a^2 \cdot \lambda_k^{(1)}} \cdot \left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \cdot at \right) \right)$.

Ответ: $u(M,t) = u_0 \cos\theta \left[\dfrac{r^3}{r_0^3} + 20\sqrt{\dfrac{r_0}{r}} \cdot \right.$

$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}r\right)}{\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^3\cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right)}\cdot\left(1-\cos\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}\cdot at\right)\right)\Bigg].\#$$

Задачи для самостоятельного решения.

2.3.1.

$M=M(r,\varphi)\in\overline{D}=\{0\le r\le r_0,\ 0\le\varphi<2\pi\}\subset R^2$;

$u=u(M,t)$;

$$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$$u(M,t)\big|_{r=r_0}=0 \text{ при } 0\le t<+\infty;$$

$$u(M,0)=0,\ u_t(M,0)=v_0\cdot J_8\left(\frac{\mu_7^{(8)}}{r_0}r\right)\cdot\cos(8\varphi),$$

$v_0=const$, при $M\in\overline{D}$.

2.3.2.

$M=M(r,\varphi)\in\overline{D}=\{0\le r\le r_0,\ 0\le\varphi<2\pi\}\subset R^2$;

$u=u(M,t)$;

$$u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u \text{ в } D \text{ при } 0<t<+\infty;$$

$u(M,t)\big|_{r=r_0}=u_0\cdot\cos\varphi$, $u_0=const$, при $0<t<+\infty$;

$$u(M,0)=0,\ u_t(M,0)=0 \text{ при } M\in\overline{D}.$$

Тема 3.
Уравнение Гельмгольца.

3.1. Решение задач для уравнения $\Delta v + c \cdot v = 0$ в ограниченных областях.

Уравнением Гельмгольца называют уравнение вида $\Delta v(M) + c \cdot v(M) = 0$ или неоднородное уравнение $\Delta v(M) + c \cdot v(M) = -f(M)$, где $c = const$, $M = M(x, y, z) \in R^3$ или $M = M(x, y) \in R^2$. При $c = 0$ уравнение Гельмгольца является уравнением Лапласа или уравнением Пуассона. При $c < 0$ его принято записывать в виде

$$\Delta v(M) - k^2 v(M) = 0 \text{ (или } -f(M)), \qquad (1.1)$$

а при $c > 0$ – в виде

$$\Delta v(M) + k^2 v(M) = 0 \text{ (или } -f(M)), \qquad (1.2)$$

где $k = const > 0$. Обычно именно (1.2) называют уравнением Гельмгольца.

Свойства решений уравнений (1.1) и (1.2) различны. Это можно увидеть уже в одномерном случае, когда $v = v(x)$. Уравнению $v_{xx} - k^2 v = 0$ соответствует характеристическое уравнение $p^2 - k^2 = 0$, которое имеет действительные корни $p_{1,2} = \pm k$; им отвечают линейно независимые решения $v_1(x) = e^{kx}$, $v_2(x) = e^{-kx}$. Уравнению $v_{xx} + k^2 v = 0$ соответствует характеристическое уравнение $p^2 + k^2 = 0$, которое имеет мнимые корни $p_{1,2} = \pm ik$ (i – мнимая единица); им отвечают линейно независимые комплексные решения $v_1(x) = e^{ikx}$,

$v_2(x)=\overline{v_1(x)}=e^{-ikx}$, либо пара линейно независимых действительных решений $\cos(kx)=\operatorname{Re} v_1(x)$, $\sin(kx)=\operatorname{Im} v_1(x)$.

Физическое значение имеет уравнение (1.2), описывающее установившиеся колебания. Пусть в уравнении колебаний $u_{tt}(M,t)=a^2\cdot\Delta_M u(M,t)+g(M,t)$ функция g периодична по времени. Обозначим через ω её частоту, а зависящую от точки M амплитуду величины g – через $a^2\cdot f(M)$: $g(M,t)=a^2 f(M)\cos(\omega t)$. В некоторых случаях колебания, описываемые функцией $u(M,t)$, будут происходить по такому же гармоническому закону. Установившиеся колебания (например, стоячая волна) – это колебания с той же частотой ω и некоторой амплитудой $v(M)$: $u(M,t)=v(M)\cos(\omega t)$. Подставляя такие функции $u(M,t)$ и $g(M,t)$ в уравнение колебаний, получим относительно $v(M)$ уравнение $\Delta v(M)+\dfrac{\omega^2}{a^2}v(M)=-f(M)$. Амплитуда $v(M)$ свободных колебаний (при $g\equiv 0$), имеющих частоту ω, удовлетворяет уравнению $\Delta v(M)+\dfrac{\omega^2}{a^2}v(M)=0$. Приведём примеры стоячих волн.

Пусть n – фиксированное натуральное число. Функция $u(x,t)=\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi n a}{l}t\right)$ удовлетворяет уравнению поперечных свободных колебаний струны $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, концы которой закреплены:

$u(0,t)=u(l,t)=0$. Здесь $\omega=\dfrac{\pi n a}{l}$, а амплитуда $v(x)=\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)$ удовлетворяет уравнению $v_{xx}+\dfrac{\omega^2}{a^2}v=0$ (проверьте!); $u(x,t)$ – стоячая волна.

Пусть n и m – фиксированные натуральные числа. Функция

$$u(x,y,t)=\sin\left(\frac{\pi m}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l_2}y\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2}at\right)$$

удовлетворяет уравнению поперечных свободных колебаний прямоугольной мембраны $u_{tt}=a^2\cdot\Delta_{x,y}u$, $0<x<l_1$, $0<y<l_2$, края которой закреплены. Здесь $\omega=\sqrt{\left(\dfrac{\pi m}{l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\pi n}{l_2}\right)^2}a$; амплитуда $v(x,y)=\sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2}y\right)$ удовлетворяет уравнению $\Delta v+\dfrac{\omega^2}{a^2}v=0$ (проверьте!); $u(x,y,t)$ – стоячая волна.

Замечание. Наряду с периодическими колебаниями $u(M,t)=v(M)\cos(\omega t)$ можно рассматривать и колебания, подчиняющиеся закону $v(M)\sin(\omega t)$. Удобно ввести комплекснозначную функцию

$v(M)(\cos(\omega t)+i\cdot\sin(\omega t))=v(M)\cdot e^{i\omega t}$ и считать именно её удовлетворяющей уравнению колебаний $u_{tt}=a^2\cdot\Delta_M u$.#

В ограниченной области $D\subset R^3$ (или $D\subset R^2$) для уравнения Гельмгольца можно поставить такие же краевые задачи, как для уравнений Лапласа и Пуассона (например, с краевыми условиями Дирихле или Неймана). Свойства таких краевых задач определяются значением постоянной c.

Если число c является собственным значением краевой задачи для уравнения $(-\Delta v)=c\cdot v$ с некоторым однородным краевым условием на границе S области D, то решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца с тем же краевым условием заведомо не будет единственным (если оно существует).

Если число c не является собственным значением краевой задачи для уравнения $(-\Delta v)=c\cdot v$ с однородным краевым условием на границе S, то решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца с тем же краевым условием единственно (если оно существует).

Напомним свойства задачи на собственные значения для оператора $(-\Delta v)$. Пусть D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, для которой выполнены формулы Грина. Задача на собственные значения

$$\begin{cases}-\Delta v(M)=\lambda\cdot v(M), & M\in D,\\ v\big|_{M\in S}=0\end{cases}\tag{1.3}$$

имеет бесконечное счётное множество собственных значений, у которого нет конечных предельных точек; все собственные значения действительны и положительны; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Если вместо однородного краевого условия Дирихле в задаче (1.3) поставить однородное краевое условие Неймана, то указанные свойства собственных функций и собственных значений сохранятся, но добавится собственное значение $\lambda = 0$.

Очевидно, что если $c \le 0$, то задача Дирихле для уравнения Гельмгольца в ограниченной области D может иметь лишь единственное решение. Это можно обосновать и при помощи принципа максимума и минимума.

Теорема (принцип максимума и минимума). Если $c < 0$, то решение уравнения $\Delta v + c \cdot v = 0$ внутри ограниченной области D не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума.

Доказательство принципа максимума. В противном случае во внутренней точке ограниченной области D, в которой достигается положительный максимум, были бы выполнены неравенства $v_{xx} \le 0$, $v_{yy} \le 0$, $v_{zz} \le 0$. Тогда в этой точке $\Delta v + c \cdot v < 0$, что противоречит уравнению. #

В случае $c = 0$ для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$ принцип максимума и минимума выполнен.

Найдем сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в R^3. Пусть $M = M(x, y, z)$ и $v(M) = v(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; тогда $\Delta_M v = \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dv}{dr}\right) \equiv \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d^2(r \cdot v)}{dr^2}$. В уравнении $\Delta v + c \cdot v = 0$ выполним замену искомой функции: положим $w(r)=r\cdot v(r)$. Тогда функция w удовлетворяет уравнению

$$w_{rr}+c\cdot w=0. \qquad (1.4)$$

В случае $c=-k^2$, $k>0$, для уравнения (1.4) имеем решения $w_1(r)=e^{-kr}$, $w_2(r)=e^{kr}$. Следовательно, $v_1(r)=\dfrac{e^{-kr}}{r}$, $v_2(r)=\dfrac{e^{kr}}{r}$; или другая фундаментальная система решений $v(r)$: $\dfrac{sh(kr)}{r}$, $\dfrac{ch(kr)}{r}$. В случае $c=k^2$, $k>0$, для уравнения (1.4) имеем решения $w_1(r)=e^{ikr}$, $w_2(r)=e^{-ikr}$. Следовательно, $v_1(r)=\dfrac{e^{ikr}}{r}$, $v_2(r)=\dfrac{e^{-ikr}}{r}$; или другая фундаментальная система решений $v(r)$: $\dfrac{\cos(kr)}{r}$, $\dfrac{\sin(kr)}{r}$.

Задача 1. $M=M(x,y,z)\in\overline{D}=\{0\le r\le r_0\}$ – шар в R^3; $v=v(M)$;

$$\Delta v-k^2\cdot v=0 \quad \text{в } D,\ k>0;$$

$$v\big|_{r=r_0}=v_0=const.$$

Решение. Очевидно, что $v(M)=v(r)$. Общее решение уравнения в $\overline{D}$ имеет вид

$v(r)=A\cdot\dfrac{ch(kr)}{r}+B\cdot\dfrac{sh(kr)}{r}$. Из условия $|v(0)|<\infty$

следует $A = 0$, т.к. $\lim\limits_{r \to 0+0} \frac{ch(kr)}{r} = +\infty$; с другой стороны, по правилу Лопиталя $\lim\limits_{r \to 0+0} \frac{sh(kr)}{r} = k < \infty$. Постоянную B находим из краевого условия: $B = \frac{v_0 r_0}{sh(kr_0)}$.

Ответ: $v(r) = \frac{v_0 r_0 \cdot sh(kr)}{r \cdot sh(kr_0)}$.#

Задача 2. Найти собственные значения и собственные функции задачи $(-\Delta v) = \lambda \cdot v$ в шаре $D = \{0 \le r < r_0\} \subset R^3$, $v|_{r=r_0} = 0$ в случае сферической симметрии: $v = v(r)$. В смысле какого скалярного произведения собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны? Решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta v + c \cdot v = 0$ в D, $v|_{r=r_0} = v_0 = const$ (рассмотреть все действительные значения параметров c и v_0).

Решение. Положим $w(r) = r \cdot v(r)$. Поскольку $|v(0)| < const$, имеем $w(r) \underset{r \to 0+0}{\to} 0$. Для функции $w(r)$ получили задачу на собственные значения

$$\begin{cases} w''(r) + \lambda \cdot w(r) = 0, \quad 0 \le r \le r_0, \\ w(0) = 0, \quad w(r_0) = 0. \end{cases}$$

Её решение: $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{r_0}\right)^2$, $w_n(r) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{r_0} r\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда $v_n(r) = \dfrac{1}{r} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi n}{r_0} r\right)$ – собственные функции задачи в шаре. Очевидно, что $(v_n, v_m) = \int\limits_0^{r_0} v_n(r) v_m(r) r^2 dr = 0$ при $n \neq m$.

Решение задачи Дирихле $\Delta v + c \cdot v = 0$ в D, $v|_{r=r_0} = v_0$ сферически симметрично: $v = v(r)$. Положим $v(r) = V(r) + v_0$; тогда функция $V(r)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta V(r) + c \cdot V(r) = -c \cdot v_0,\ 0 \le r < r_0;\ V(r_0) = 0.$$

Если $c = 0$, то $V(r) \equiv 0$. Далее считаем, что $c \neq 0$. Выполняя замену функции $W(r) = r \cdot V(r)$, приходим к задаче

$$\begin{cases} W''(r) + c \cdot W(r) = -c \cdot r \cdot v_0, & 0 \le r \le r_0, \\ W(0) = 0, \quad W(r_0) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Пусть число c отлично от всех собственных значений λ_n. Рассмотрим сначала случай $c < 0$ (тогда заведомо $c \neq \lambda_n$ при всех n). В этом случае общее решение уравнения в (1.5) имеет вид $W(r) = A \cdot ch\left(\sqrt{-c}r\right) + B \cdot sh\left(\sqrt{-c}r\right) - v_0 \cdot r$. Найдя постоянные A и B из краевых условий, получаем единственное решение задачи (1.5):

$$W(r)=v_0\left[\frac{r_0}{sh\left(\sqrt{-c}r_0\right)}\cdot sh\left(\sqrt{-c}r\right)-r\right];$$

$sh\left(\sqrt{-c}r_0\right)\neq 0$! Поэтому при $c<0$ получаем единственное решение задачи Дирихле:

$$v(r)=\frac{1}{r}W(r)+v_0=\frac{v_0 r_0}{sh\left(\sqrt{-c}r_0\right)}\cdot\frac{sh\left(\sqrt{-c}r\right)}{r}.$$

Рассмотрим случай $c>0$, $c\neq\lambda_n$ при всех n. В этом случае общее решение уравнения в (1.5) имеет вид $W(r)=A\cdot\cos\left(\sqrt{c}r\right)+B\cdot\sin\left(\sqrt{c}r\right)-v_0\cdot r$. Найдя постоянные A и B из краевых условий, получаем единственное решение задачи (1.5):

$$W(r)=v_0\left[\frac{r_0}{\sin\left(\sqrt{c}r_0\right)}\cdot\sin\left(\sqrt{c}r\right)-r\right];$$

$\sin\left(\sqrt{c}r_0\right)\neq 0$! Поэтому при $c>0$, $c\neq\lambda_n$ получаем единственное решение задачи Дирихле:

$$v(r)=\frac{v_0 r_0}{\sin\left(\sqrt{c}r_0\right)}\cdot\frac{\sin\left(\sqrt{c}r\right)}{r}.$$

Пусть теперь $c=\lambda_{n_0}$ при некотором n_0. Если в условии задачи $v_0=0$, то краевое условие $W(r_0)=0$ в (1.5) будет выполнено при любой постоянной B, т.к. $\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}}r_0\right)=0$. Поэтому задача Дирихле имеет бесконечно много решений:

$v(r)=\dfrac{B}{r}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}}r\right)$, где B – произвольная постоянная. Если в условии задачи $v_0 \neq 0$, то краевое условие $W(r_0) = 0$ не может быть выполнено; задача Дирихле не имеет решений.#

Задача 3. $M \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0\}$ – шар в R^3; $v = v(M)$;

$$\Delta v + c \cdot v = -f_0 \text{ в } D, \ f_0 = const; \ v\big|_{r=r_0} = 0.$$

Найти $v(M)$ (рассмотреть все действительные значения параметров c и f_0).

Решение. Полагая $W(r) = r \cdot v(r)$, приходим к задаче вида (1.5). Но можно решать задачу, раскладывая её решение в ряд Фурье по системе функций $\left\{\frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{r_0} r\right)\right\}$: $\quad v(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{r_0} r\right)$. Для нахождения коэффициентов A_n подставим этот ряд в уравнение и разложим $(-f_0)$ в ряд Фурье по указанной системе функций (проведите вычисление коэффициентов Фурье!). Тогда при каждом n получаем $A_n \cdot \left[c - \left(\frac{\pi n}{r_0}\right)^2\right] = \frac{2 r_0 f_0 (-1)^n}{\pi n}$. Если $c \neq \left(\frac{\pi n}{r_0}\right)^2$ при всех n, то имеем единственное решение $v(r)$. Если $f_0 \neq 0$, $c = \left(\frac{\pi n_0}{r_0}\right)^2$ при некотором n_0, то исходная задача не имеет решений. Если $f_0 = 0$, $c = \left(\dfrac{\pi n_0}{r_0}\right)^2$, то исходная задача имеет бесконечно много решений (запишите их!). Если $c = 0$, то $v(r) = \dfrac{f_0}{6}\left(r_0^2 - r^2\right)$ (проверьте!). #

Задача 4. $M = M(x, y, z) \in \overline{D} \subset R^3$,

$$\overline{D} = \{0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2, 0 \le z \le l_3\};\ v = v(M);$$

$$\Delta v + c \cdot v = -f(M) \text{ в } D;$$

$$v\big|_{M \in S} = p(M) \ (S \text{ – граница области } \overline{D}).$$

При каких значениях c решение задачи единственно?

Ответ: если $c \ne \pi^2 \cdot \left(\dfrac{m^2}{l_1^2} + \dfrac{n^2}{l_2^2} + \dfrac{k^2}{l_3^2}\right)$ при всех натуральных m, n, k, то решение задачи единственно; если $c = \pi^2 \cdot \left(\dfrac{m_0^2}{l_1^2} + \dfrac{n_0^2}{l_2^2} + \dfrac{k_0^2}{l_3^2}\right)$, то имея решение $v(M)$, можно построить решения $v(M) + const \cdot V_{m_0, n_0, k_0}(M)$, где V_{m_0, n_0, k_0} – собственная функция задачи $(-\Delta V) = \lambda \cdot V$ в D, $V\big|_{M \in S} = 0$.#

Задача 5.

$$M = M(x, y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2\} \subset R^2;$$

$$v = v(M); \tag{1.6}$$

$$\Delta v + c \cdot v = 0 \quad \text{в } D;$$

$$v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l_1} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y \le l_2;$$
$$v\big|_{y=0} = 0, \; v\big|_{y=l_2} = \varphi(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l_1;$$
$$\varphi \in C[0, l_1], \; \varphi(0) = \varphi(l_1) = 0.$$

Найти $v(M)$ (рассмотреть все действительные значения параметра c).

Решение. Задача на собственные значения
$$\begin{cases} (-\Delta V) = \lambda \cdot V \quad \text{в} \quad D; \\ V\big|_{x=0} = V\big|_{x=l_1} = V\big|_{y=0} = V\big|_{y=l_2} = 0 \end{cases}$$
имеет решение $\lambda_{m,n} = \pi^2 \cdot \left(\dfrac{m^2}{l_1^2} + \dfrac{n^2}{l_2^2} \right)$, $V_{m,n}(M) = \sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1} x \right) \sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2} y \right)$, $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть число c отлично от всех собственных значений $\lambda_{m,n}$. Рассмотрим сначала случай $c < 0$. Разделим переменные в уравнении (1.6): положим $v(M) = X(x)Y(y)$ и учтём нулевые краевые условия. Тогда получим задачу
$$X'' + \alpha X(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l_1, \; X(0) = 0, \; X(l_1) = 0,$$
из которой $\alpha_m = \left(\dfrac{\pi m}{l_1} \right)^2$, $X_m(x) = \sin \dfrac{\pi m x}{l_1}$, $m = 1, 2, \ldots$, и уравнение второго порядка с одним краевым условием:
$$Y'' + (c - \alpha_m) Y(y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y \le l_2, \; Y(0) = 0. \quad (1.7)$$

Поскольку $c-\alpha_m<0$, решение задачи (1.7) имеет вид $Y_m(y)=A_m\cdot\widetilde{Y}_m(y)$, $\widetilde{Y}_m(y)=sh\left(\sqrt{\alpha_m-c}y\right)$. Решение исходной задачи в случае $c<0$ надо искать в виде

$$v(M)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{l_1}x\right)\cdot\widetilde{Y}_m(y). \tag{1.8}$$

Коэффициенты A_m найдём из краевого условия $v\big|_{y=l_2}=\varphi(x)$: $A_m=\dfrac{\varphi_m}{\widetilde{Y}_m(l_2)}$, где

$$\varphi_m=\frac{2}{l_1}\int_0^{l_1}\varphi(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{l_1}x\right)dx,\ \widetilde{Y}_m(l_2)\neq 0.$$

При $c=0$ исходная задача является задачей Дирихле для уравнения Лапласа в $\overline{D}$. Её решение даётся той же формулой (1.8), оно единственно.

При $0<c<\alpha_1$ снова имеем $c-\alpha_m<0$ при всех m, поэтому решение получаем по той же формуле (1.8).

При $\alpha_{m_0}<c<\alpha_{m_0+1}$ будут выполнены неравенства $c-\alpha_m>0$ для $m=1,\dots,m_0$; для таких m из (1.7) получим $Y_m(y)=A_m\cdot\widetilde{Y}_m(y)$, где $\widetilde{Y}_m(y)=\sin\left(\sqrt{c-\alpha_m}y\right)$; $\widetilde{Y}_m(l_2)\neq 0$. Для $m>m_0$ определение функций $\widetilde{Y}_m(y)$ остаётся прежним. Решение получаем по (1.8).

При $c=\alpha_{m_0}$ (и снова в предположении $c\neq\lambda_{m,n}$) из (1.7) получим $Y_{m_0}(y)=A_{m_0}\cdot\widetilde{Y}_{m_0}(y)$, где $\widetilde{Y}_{m_0}(y)=y$;

$\tilde{Y}_{m_0}(l_2) \neq 0$. Решение получаем по (1.8).

Рассмотрим теперь случай $c = \lambda_{m_0,n_0}$ при некоторых m_0, n_0. Тогда в задаче (1.7) коэффициент $c - \alpha_{m_0} = \left(\frac{\pi n_0}{l_2}\right)^2 > 0$. Поэтому $Y_{m_0}(y) = A_{m_0} \cdot \tilde{Y}_{m_0}(y)$, где $\tilde{Y}_{m_0}(y) = \sin\left(\frac{\pi n_0}{l_2} y\right)$; $\tilde{Y}_{m_0}(l_2) = 0$. Если $\varphi_{m_0} = 0$, то коэффициент A_{m_0} в формуле (1.8) нельзя однозначно определить из краевого условия; в этом случае ряд (1.8) будет содержать слагаемое $A_{m_0} \cdot V_{m_0,n_0}(M)$, где A_{m_0} – произвольная постоянная. Если же $\varphi_{m_0} \neq 0$, то исходная задача не имеет решений.#

Задача 6.

$M = M(r,\varphi) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\} \subset R^2$;
$v = v(M)$;

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{в } D; \quad v\big|_{r=r_0} = p(\varphi);$$

$k = const > 0$, k^2 не является собственным значением задачи $(-\Delta V) = \lambda \cdot V(M)$ в D, $V\big|_{r=r_0} = 0$. (1.9)

Решение. Разделим переменные в уравнении Гельмгольца: положим $v(M) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$; тогда

$$\frac{r\cdot\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR(r)}{dr}\right)}{R(r)}+k^2\cdot r^2=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\gamma=const.$$

Задача $\Phi''(\varphi)+\gamma\cdot\Phi(\varphi)=0$, $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ имеет решение $\gamma_n=n^2$, $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)$, $n=0,1,2,\ldots$. В задаче

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR(r)}{dr}\right)+\left(k^2-\dfrac{n^2}{r^2}\right)\cdot R(r)=0,\\ 0\le r\le r_0,\ |R(0)|<\infty\end{cases}\qquad(1.10)$$

выполним замену переменных: положим $q=kr$, $w(q)=R\left(\dfrac{q}{k}\right)$. Тогда уравнение в (1.10) приведётся к виду

$$q^2\cdot\frac{d^2w}{dq^2}+q\cdot\frac{dw}{dq}+\left(q^2-n^2\right)\cdot w=0$$

– уравнение Бесселя. Условие ограниченности при $r=0$ даёт $w(q)=J_n(q)$, т.е. $R(r)=J_n(kr)$.

Решение исходной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге надо искать в виде

$$v(M)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)\right]\cdot J_n(kr).$$

Коэффициенты A_n и B_n найдем из краевого условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)\right]\cdot J_n(kr_0)=$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)],$$

где $\quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) \cdot \cos(n\varphi) d\varphi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$

$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots.$ Отсюда

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2J_0(kr_0)}, \qquad A_n = \frac{\alpha_n}{J_n(kr_0)}, \qquad B_n = \frac{\beta_n}{J_n(kr_0)},$$

$n = 1, 2, \ldots$. Заметьте, что все $J_n(kr_0) \neq 0$, т.к. число k^2 не является собственным значением задачи (1.9) в круге $\overline{D}$.#

Задача 7. $M \in \overline{D} = \{0 \leq r \leq r_0\}$ – шар в R^3; $v = v(M)$;

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{в } D, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=r_0} = q_0 = const.$$

Найти все значения $k > 0$, при которых данная задача имеет единственное решение. Найти это решение.

Решение. Очевидно, что любое решение задачи сферически симметрично: $v = v(r)$. С помощью замены функции $\quad w(r) = r \cdot v(r) \quad$ получаем $v(r) = A \cdot \frac{\cos(kr)}{r} + B \cdot \frac{\sin(kr)}{r}$. Из условия $|v(0)| < \infty$ следует $A = 0$. Тогда краевое условие при $r = r_0$ имеет вид $\quad \frac{B}{r_0^2} [k \cdot \cos(kr_0) \cdot r_0 - \sin(kr_0)] = q_0$.

Ответ: при любом $k>0$, при котором $tg(kr_0)\neq kr_0$, задача имеет единственное решение

$$v(r)=\frac{q_0 r_0^2}{kr_0\cdot\cos(kr_0)-\sin(kr_0)}\cdot\frac{\sin(kr)}{r};$$

если $k>0$ таково, что $tg(kr_0)=kr_0$, то при $q_0\neq 0$ задача не имеет решений, а при $q_0=0$ задача имеет бесконечно много решений: $v(r)=B\cdot\dfrac{\sin(kr)}{r}$, B – произвольная постоянная.#

Задачи для самостоятельного решения.

3.1.1. Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$\Delta u(x,y,z)+p_1u_x+p_2u_y+p_3u_z+qu+G(x,y,z)=0,$$

где $p_1^2+p_2^2+p_3^2\neq 4q$, можно заменой искомой функции $u(x,y,z)=v(x,y,z)\cdot\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(p_1x+p_2y+p_3z)\right\}$ привести к виду $\Delta v+c\cdot v+F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=G(x,y,z)\cdot\exp\left\{\dfrac{1}{2}(p_1x+p_2y+p_3z)\right\}$. Найти постоянную c.

3.1.2. Проверить, что функция $v(r)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{kr\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}}d\xi$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta v(r)-k^2v(r)\equiv\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)-k^2v=0,\ r>0$$

(случай центральной симметрии на плоскости).

3.1.3. $M = M(r,\varphi) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ – круг в R^2; $v = v(M)$;

$$\Delta v = v \quad \text{в } D; \quad v\big|_{r=r_0} = \cos\varphi.$$

Найти наибольшее и наименьшее значения решения $v(M)$ в $\overline{D}$.

3.1.4. $M = M(x,y) \in \overline{D} = \{x^2 + y^2 \le 1\}$ – круг в R^2; $v = v(M)$;

$$\Delta v = v \quad \text{в } D; \quad v\big|_{x^2+y^2=1} = xy.$$

Найти наибольшее и наименьшее значения решения $v(M)$ в $\overline{D}$.

3.1.5. $M \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0\}$ – шар в R^3; $v = v(M)$;

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{в } D, \quad v\big|_{r=r_0} = p_0 = const.$$

Найти все значения $k > 0$, при которых данная задача имеет единственное решение. Найти это решение.

3.1.6. $M \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0\}$ – шар в R^3; $v = v(M)$;

$$\Delta v - k^2 v = 0 \quad \text{в } D, \quad \frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = q_0 = const;$$

$k = const > 0$.

3.1.7. $M = M(x,y) \in \overline{D} = \{0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2\} \subset R^2$; $v = v(M)$;

$$\Delta v + c \cdot v = 0 \quad \text{в } D;$$

$$v\big|_{x=0} = \frac{v_0}{l_2^2} \cdot (y^2 - l_2 y), \; v\big|_{x=l_1} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y \le l_2;$$

$v_0 = const$;

$$v\big|_{y=0} = 0,\ v\big|_{y=l_2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l_1.$$

Найти $v(M)$ (рассмотреть все действительные значения параметра c).

3.1.8. $M = M(r,\varphi) \in \overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi < 2\pi\} \subset R^2$; $v = v(M)$;

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{в } D; \qquad v\big|_{r=r_0} = v_0 \cdot \cos(7\varphi),$$

$v_0 = const$;

$k = const > 0$, k^2 не является собственным значением задачи $(-\Delta V) = \lambda \cdot V(M)$ в D, $V\big|_{r=r_0} = 0$.

3.2. Решение задач для уравнения $\Delta v + c \cdot v = 0$ в неограниченной области. Условия излучения Зоммерфельда.

Пусть $R^3 = D \cup S \cup D'$, где D– ограниченная область с кусочно-гладкой границей S. Во всём пространстве R^3 рассмотрим при $0 < t < +\infty$ уравнение колебаний $u_{tt}(M,t) = a^2 \cdot \Delta_M u(M,t) + g(M,t)$, в котором функция g описывает источники колебаний. Предположим, что функция g всюду непрерывно дифференцируема, может отличаться от нуля лишь в области D и периодична по времени: $g(M,t) = a^2 \cdot f(M) \cdot \cos(\omega t)$. Если в начальный момент времени $u(M,0) = 0$, $u_t(M,0) = 0$, то можно считать, что из-за действия в D периодического источника колебаний при больших значениях t (при $t \to +\infty$) во всем пространстве установятся колебания с той же частотой ω. Установившиеся колебания – это колебания вида

$u(M,t)=v(M)\cdot\cos(\omega t)$ с амплитудой $v(M)$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta v(M)+k^2\cdot v(M)=-f(M),\ M\in R^3, \qquad (2.1)$$

где $k=\dfrac{\omega}{a}=const>0$, $f(M)$ – определённая всюду в R^3 непрерывно дифференцируемая функция, $f(M)\equiv 0$ вне области D. Кроме уравнения (2.1) надо ещё учесть, что надо найти амплитуду $v(M)$ волны, которая **расходится** от области D в бесконечность.

К уравнению Гельмгольца в неограниченной области D' приводит также задача о нахождении волны, отраженной от границы S тела D. Пусть во всем пространстве R^3 источников колебаний нет, а на тело D падает пришедшая из бесконечности известная плоская монохроматическая волна, зависящая от времени t по гармоническому закону с частотой ω. Можно считать, что при больших значениях t (при $t\to+\infty$) всюду в D' установятся колебания с частотой ω, которые будут являться суммой падающей волны и отраженной от D. Амплитуда колебаний будет удовлетворять в D' однородному уравнению Гельмгольца, а на поверхности S требуется поставить то или иное краевое условие, описывающее характер отражения (например, краевое условие Дирихле или Неймана). Кроме того, чтобы найти амплитуду отраженной волны, надо учесть, что это волна, **расходящаяся** от области D в бесконечность.

Гармонические колебания удобно описывать комплекснозначными функциями. Например, вместо плоской косинусоидальной волны

$$u(x,t)=u_0\cdot\cos(\omega t-kx+\alpha)\quad (u_0=const>0,$$
$$\omega=const>0,\ k=const>0,\ \alpha=const),$$

которая распространяется со скоростью $\dfrac{\omega}{k}$ вдоль положительного направления оси Ox, можно записать её экспоненциальную форму

$u_0\exp\{i\cdot(\omega t-kx+\alpha)\}=u_0\cdot e^{i\alpha}\cdot e^{-ikx}\cdot e^{i\omega t}$, $i=\sqrt{-1}$; физический смысл имеет только $u(x,t)=\mathrm{Re}[u_0\cdot\exp\{i\cdot(\omega t-kx+\alpha)\}]$. Вместо волны $u_0\cdot\cos(\omega t+kx+\alpha)$, которая распространяется в направлении против оси Ox, можно записать её экспоненциальную форму

$$u_0\exp\{i\cdot(\omega t+kx+\alpha)\}=u_0\cdot e^{i\alpha}\cdot e^{ikx}\cdot e^{i\omega t}.$$

Вместо плоской синусоидальной волны $u_0\cdot\sin(\omega t-kx+\alpha)$ можно ввести $u_0\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot e^{ikx}\cdot e^{-i\omega t}$; физический смысл имеет только $\mathrm{Re}\left[u_0\cdot\exp\left\{i\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega t+kx-\alpha\right)\right\}\right]$. Вместо волны $u_0\cdot\sin(\omega t+kx+\alpha)$ можно ввести $u_0\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot e^{-ikx}\cdot e^{-i\omega t}$.

В задачах об установившихся колебаниях вместо функции $u(M,t)=v(M)\cdot\cos(\omega t)$ удобно ввести комплекснозначную функцию $v(M)\cdot e^{i\omega t}$ и рассматривать $v(M)$ как комплекснозначную функцию точки $M\in R^3$.

Если вместо функций $g(M,t)=a^2\cdot f(M)\cdot\cos(\omega t)$ и $u(M,t)=v(M)\cdot\cos(\omega t)$ выбрать функции $g(M,t)=a^2\cdot f(M)\cdot\sin(\omega t)$ и $u(M,t)=v(M)\cdot\sin(\omega t)$, то $u(M,t)$ удобно заменить на $v(M)\cdot e^{-i\omega t}$ с комплекснозначной $v(M)$. Тогда $\Delta v(M)=\Delta(\operatorname{Re}v(M))+i\cdot\Delta(\operatorname{Im}v(M))$. Уравнение Гельмгольца (2.1) надо теперь понимать как два равенства – отдельно для действительных частей входящих в него функций и отдельно для мнимых частей; но можно рассматривать (2.1) и как одно уравнение относительно комплекснозначной функции $v(M)$.

Уравнение Гельмгольца – это уравнение эллиптического типа, при $k=0$ оно представляет собой уравнение Лапласа или уравнение Пуассона. Для уравнения эллиптического типа в неограниченной области кроме краевого условия на границе S (если она есть) надо потребовать определённого поведения решения на бесконечности. Это требование должно обеспечивать единственность решения и иметь естественный физический смысл. Например, во внешней краевой задаче для уравнения Лапласа мы ищем регулярное на бесконечности решение: в пространстве R^3 решение должно равномерно стремиться к нулю на бесконечности, в аналогичной задаче на плоскости R^2 решение должно быть ограниченным на бесконечности. Такие же требования предъявляются и к решениям внешних задач для уравнения Пуассона $\Delta v(M)=-f(M)$, если функция f достаточно гладкая и финитная (то есть отлична от нуля лишь в некоторой ограниченной области). Для выделения единственного решения во внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца (2.1) такой же регулярности решения на бесконечности недостаточно. Это видно уже из следующего примера: сферически симметричные в R^3 решения уравнения $\Delta v(M)+k^2\cdot v(M)=0$ имеют вид $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ и $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$; при $r\to+\infty$ оба эти решения равномерно стремятся к нулю на бесконечности. Поэтому нужны дополнительные требования к поведению решения на бесконечности, которые выделяли бы амплитуду $v(M)$ именно **расходящейся** от области D волны.

Пример. Функция $\dfrac{e^{i\cdot(\omega t+kr)}}{r}$ имеет смысл бегущей косинусоидальной сферической волны, сходящейся в начало координат из бесконечности; обычно она не имеет физического содержания. Функция $\dfrac{e^{i\cdot(\omega t-kr)}}{r}$ имеет смысл бегущей косинусоидальной сферической волны, расходящейся от начала координат в бесконечность. Такая волна может создаваться, например, источником колебаний в точке $r=0$.

Функция $\dfrac{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\cdot(\omega t+kr)}}{r}$ имеет смысл бегущей синусоидальной сферической волны, сходящейся в начало координат из бесконечности. Функция $\dfrac{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\cdot(\omega t-kr)}}{r}$ имеет смысл бегущей синусоидальной сферической волны, расходящейся от начала координат в бесконечность.#

Требования к решению уравнения Гельмгольца (2.1) иметь определённое асимптотическое поведение на бесконечности выражаются условиями излучения Зоммерфельда. Они выделяют в неограниченной области $D' \subset R^3$ амплитуду $v(M)$ **расходящейся** от D в бесконечность волны, источники которой находятся в ограниченной области D. Амплитуда волны, источники которой находятся на бесконечности, не удовлетворяют условиям излучения.

Условия излучения можно получить эвристическими рассуждениями, проводя аналогию с плоскими волнами. Уравнение колебаний $u_{tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t)$ с одной пространственной переменной x описывает плоские волны $u_1(x,t) = F_1(x - at)$ и $u_2(x,t) = F_2(x + at)$, распространяющиеся соответственно вдоль положительного направления оси Ox и против Ox. При этом функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t + a \cdot u_x = 0, \tag{2.2}$$

но не удовлетворяет уравнению

$$u_t - a \cdot u_x = 0. \tag{2.3}$$

Напротив, функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет (2.3), но не удовлетворяет (2.2). Пусть $u_1(x,t) = v_1(x) \cdot e^{i\omega t}$, $u_2(x,t) = v_2(x) \cdot e^{i\omega t}$. Тогда из (2.2) и (2.3) вытекает, что функция $v_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$v_x + i \cdot k \cdot v = 0, \qquad k = \frac{\omega}{a}, \tag{2.4}$$

но не удовлетворяет уравнению

$$v_x - i \cdot k \cdot v = 0, \qquad k = \frac{\omega}{a}. \tag{2.5}$$

Напротив, функция $v_2(x)$ удовлетворяет (2.5), но не удовлетворяет (2.4).

Задача. Что можно утверждать о функциях $v_1(x)$ и $v_2(x)$, если $u_1(x,t) = v_1(x) \cdot e^{-i\omega t}$, $u_2(x,t) = v_2(x) \cdot e^{-i\omega t}$?#

Волна, создаваемая источниками, которые расположены в ограниченной области $D \subset R^3$, вдали от D будет подобна расходящейся сферической волне. В сферической системе координат в R^3 в случае сферической симметрии уравнение колебаний имеет вид

$$u_{tt}(r,t) = a^2 \cdot \Delta u(r,t) \equiv a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Отсюда получаем расходящуюся в бесконечность сферическую волну $u_1(r,t) = \frac{1}{r} \cdot F_1(r - at)$ и приходящую из бесконечности сферическую волну $u_2(r,t) = \frac{1}{r} \cdot F_2(r + at)$; функции F_1 и F_2 естественно считать ограниченными. Если в равенствах (2.2) и(2.3) заменить переменную x на r, то для сферических волн $u_1(r,t)$ и $u_2(r,t)$ эти равенства уже не будут выполняться. Но для волны $u_1(r,t)$ можно потребовать асимптотического выполнения (2.2) при $r \to +\infty$ с точностью до $\underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{r}\right)$. Действительно:

$$\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial t}+a\cdot\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}=-\frac{a}{r^2}\cdot F_1(r-at)=\underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Это соображение и приводит к требуемой аналогии с равенствами (2.4) и (2.5) для расходящейся от D в бесконечность волны.

Если в задаче об установившихся колебаниях зависимость от времени имеет вид $u(M,t)=v(M)\cdot e^{i\omega t}$ (косинусоидальная волна), то условия излучения в пространстве требуют от решения уравнения Гельмгольца (2.1) поведения

$$\begin{cases} v=\underset{r\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{r}\right); & (2.6)\\ \frac{\partial v}{\partial r}+ikv=\underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{r}\right). & (2.7)\end{cases}$$

Если в задаче об установившихся колебаниях зависимость от времени имеет вид $u(M,t)=v(M)\cdot e^{-i\omega t}$ (синусоидальная волна), то условия излучения в пространстве требуют от решения уравнения Гельмгольца (2.1) поведения

$$\begin{cases} v=\underset{r\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{r}\right); & (2.8)\\ \frac{\partial v}{\partial r}-ikv=\underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{r}\right). & (2.9)\end{cases}$$

Условия (2.6) и (2.8) означают, что при больших значениях r (при $r\to+\infty$) функция $u(M,t)$ подобна сферической волне. Условия (2.7) и (2.9) означают, что это волна, **расходящаяся** от D в бесконечность. Выделяемые условиями (2.7) и (2.9) решения различны.

Теорема. Если в уравнении Гельмгольца (2.1) функция $f(M)\equiv 0$ вне ограниченной области $D\subset R^3$, то это уравнение не может иметь в R^3 более одного решения, удовлетворяющего на бесконечности условиям (2.6), (2.7) (условиям (2.8), (2.9)).#

Замечание. Можно доказать, что условие (2.6) (условие (2.8)) вытекает из уравнения Гельмгольца и условия (2.7) (условия (2.9)).#

Такие же рассуждения можно провести и в задачах об установившихся колебаниях на плоскости: $R^2=D\cup S\cup D'$. Для них аналогами условий (2.6), (2.7) являются условия

$$\begin{cases} v=\underset{r\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right); \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}+ikv=\underset{r\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{cases}$$

Аналогами условий (2.8), (2.9) являются условия

$$\begin{cases} v=\underset{r\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right); \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}-ikv=\underset{r\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{cases}$$

Задача 1. $M\in R^3\setminus D$, $D=\{0\le r<r_0\}$ – шар в R^3, $v=v(M)$;

$$\Delta v(M)+k^2\cdot v(M)=0 \qquad \text{при} \qquad M\in R^3\setminus\overline{D},$$

$k=const>0$;

$$v\big|_{r=r_0}=v_0=const.$$

Проверить, что условия излучения Зоммерфельда гарантируют единственность решения данной задачи. Найти удовлетворяющую этим условиям комплексную амплитуду $v(M)$ установившихся вне шара D колебаний $u(M,t)=v(M)\cdot e^{i\omega t}$.

Решение. Очевидно, что $v=v(r)$. Уравнение Гельмгольца в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2\big(r\cdot v(r)\big)}{dr^2}+k^2\cdot v(r)=0,\ \ r_0<r<+\infty.$$

Положим $w(r)=r\cdot v(r)$, тогда из уравнения $w''+k^2\cdot w=0$ получим $w(r)=Ae^{ikr}+Be^{-ikr}$, $v(r)=A\cdot\dfrac{e^{ikr}}{r}+B\cdot\dfrac{e^{-ikr}}{r}$. Из условия излучения $\dfrac{dv}{dr}+ikv=\underset{r\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ следует $A=0$. Из краевого условия при $r=r_0$ находим $B=v_0r_0\cdot e^{ikr_0}$.

Ответ: $v(r)=v_0r_0\cdot\dfrac{e^{ik(r_0-r)}}{r}$.#

Задача 2. Решить задачу 1 с краевым условием Неймана $\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{r=r_0}=\left.\dfrac{\partial v}{\partial(-r)}\right|_{r=r_0}=\gamma=const$ вместо условия Дирихле. Здесь $\vec{n}$ – внутренняя нормаль к границе шара $\overline{D}$.

Решение. Как и в задаче 1, из условия излучения следует $v(r) = B \cdot \dfrac{e^{-ikr}}{r}$. Из краевого условия при $r = r_0$ найдем B:

$$-B \cdot \frac{(-ik)e^{-ikr} \cdot r - e^{-ikr}}{r^2}\bigg|_{r=r_0} = \gamma, \quad B = \frac{\gamma r_0^2 e^{ikr_0}}{ikr_0 + 1}.$$

Ответ: $v(r) = \dfrac{\gamma r_0^2}{ikr_0 + 1} \cdot \dfrac{e^{ik(r_0 - r)}}{r}$.#

Задача 3. $M \in R^3 \setminus D$, $D = \{0 \le r < r_0\}$ – шар в R^3, $v = v(M)$;

$$\Delta v(M) - k^2 \cdot v(M) = 0 \qquad \text{при} \qquad M \in R^3 \setminus \overline{D},$$

$k = const > 0$;

$$v\big|_{r=r_0} = v_0 = const, \quad \lim_{r\to+\infty} v(r) = 0.$$

Решение. Очевидно, что $v = v(r)$. Положим $w(r) = r \cdot v(r)$, тогда из уравнения $w'' - k^2 \cdot w = 0$ получим $w(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr}$, $v(r) = A \cdot \dfrac{e^{kr}}{r} + B \cdot \dfrac{e^{-kr}}{r}$. Из условия $\lim\limits_{r\to+\infty} v(r) = 0$ следует $A = 0$. Из краевого условия при $r = r_0$ находим $B = v_0 r_0 \cdot e^{kr_0}$.

Ответ: $v(r) = v_0 r_0 \cdot \dfrac{e^{k(r_0 - r)}}{r}$.#

Задачи для самостоятельного решения.

3.2.1. Решить задачу 1 в случае $u(M,t)=v(M)\cdot e^{-i\omega t}$.

3.2.2. Решить задачу 2 в случае $u(M,t)=v(M)\cdot e^{-i\omega t}$.

3.2.3. Корректно ли поставлена следующая задача в R^3 вне шара D радиуса 1:

$$\Delta v+v=0 \quad \text{при} \quad 1<r<+\infty; \qquad v\big|_{r=1}=1,$$

$$v=\underset{r\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{r}\right)?$$

3.2.4. Корректно ли поставлена следующая задача в R^2 вне круга D радиуса 1:

$$\Delta v+v=0 \quad \text{при} \quad 1<r<+\infty; \qquad v\big|_{r=1}=1,$$

$$v=\underset{r\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)?$$

Ответы.

1.1.1. $$u(r,t)=3+\frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi nr}{5}\right)}{r}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{5}\right)^2 t\right\}.$$

1.1.2. $$u(M,t)=u_0\sin x\cdot\sin(3y)\cdot\exp\{-10a^2t\},$$
$$M=M(x,y).$$

1.1.3. $$u(M,t)=u_0\cos x\cdot\cos(7y)\cdot\exp\{-50a^2t\},$$
$$M=M(x,y).$$

1.1.4. $u(M,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{0,n,k}\cdot V_{0,n,k}(M)\cdot\exp\left\{-\lambda_{0,n,k}a^2t\right\}+$

$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{2m+1,n,k}\cdot V_{2m+1,n,k}(M)\cdot\exp\left\{-\lambda_{2m+1,n,k}a^2t\right\}$, где

$$M=M(x,y,z),\quad \lambda_{0,n,k}=\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l_2}\right)^2+\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l_3}\right)^2,$$

$$V_{0,n,k}(M)=\sin\frac{\pi(2n+1)y}{2l_2}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)z}{2l_3},$$

$$\lambda_{2m+1,n,k}=\left(\frac{\pi(2m+1)}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l_2}\right)^2+\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l_3}\right)^2,$$

$$V_{2m+1,n,k}(M)=\cos\frac{\pi(2m+1)x}{l_1}\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)y}{2l_2}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)z}{2l_3},$$

$$\varphi_{0,n,k}=\frac{16\cdot u_0\cdot(-1)^n\cdot\left[\pi(2k+1)\cdot(-1)^k-2\right]}{\pi^4(2n+1)^2(2k+1)^2},$$

$$\varphi_{2m+1,n,k}=-\frac{128\cdot u_0\cdot(-1)^n\cdot\left[\pi(2k+1)\cdot(-1)^k-2\right]}{\pi^6(2m+1)^2(2n+1)^2(2k+1)^2}.$$

1.1.5. $\min\limits_{\bar{Q}}u(M,t)=-u_0r_0^2$, достигается при $t=0$, $x=y=0$. $\max\limits_{\bar{Q}}u(M,t)=\frac{u_0}{2}\cdot r_0^2$, достигается при

$t=\frac{\pi}{2}$ в двух точках: $M_1\left(\frac{\sqrt{2}r_0}{2},-\frac{\sqrt{2}r_0}{2}\right)$ и $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}r_0}{2},\frac{\sqrt{2}r_0}{2}\right)$.

1.2.1. $J_3(x)=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)\cdot J_1(x)-\frac{4}{x}\cdot J_0(x)$.

1.2.2. $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos x$.

1.2.7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{8J_0\left(\mu_k^{(0)}x\right)}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^3\cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}$.

1.2.8. $u(M,t)=\exp\left\{-\left(\frac{\mu_5^{(0)}}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}\cdot J_0\left(\frac{\mu_5^{(0)}}{r_0}r\right)$.

1.2.9.

$$u(M,t)=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{(0)}\cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}.$$

1.2.10.

$$u(M,t)=-2\cdot\cos\varphi\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{(1)}\cdot J_0\left(\mu_k^{(1)}\right)}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}\right)^2\cdot t\right\}.$$

1.2.11. $u(M,t)=\dfrac{4}{\pi}\cdot\sin\varphi\cdot$

$$\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{\pi mz}{h}\cdot\frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{(1)}\cdot J_0\left(\mu_k^{(1)}\right)}\cdot\exp\left\{-\chi_{m,k}\cdot a^2\cdot t\right\},$$

где $\chi_{m,k}=\left(\dfrac{\pi m}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_k^{(1)}}{r_0}\right)^2.$

1.2.12.

$$u(M,t)=\exp\left\{-\left[\left(\frac{7\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\mu_7^{(0)}}{r_0}\right)^2\right]\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot\sin\frac{7\pi z}{h}\cdot J_0\left(\frac{\mu_7^{(0)}}{r_0}r\right).$$

1.2.13. $u(M,t)=\exp\left\{-\left[\left(\dfrac{\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_1^{(7)}}{r_0}\right)^2\right]\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot$

$$\cdot J_7\left(\frac{\zeta_1^{(7)}}{r_0}r\right)\cdot\sin\frac{\pi z}{h}\cdot\sin(7\varphi).$$

1.2.14. $u(M,t)=1+2\cdot\cos\frac{\pi z}{h}\cdot\cos(2\varphi)\cdot$

$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{-\chi_k a^2 t\right\}\cdot\frac{\xi_k^{(2)}}{\left(\xi_k^{(2)}\right)^2-4}\cdot\frac{J_3\left(\xi_k^{(2)}\right)}{\left[J_2\left(\xi_k^{(2)}\right)\right]^2},$$ где

$\chi_k=\left(\frac{\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\xi_k^{(2)}}{r_0}\right)^2$, $\xi_k^{(2)}$ – положительные нули функции $J_2'(\xi)$.

1.3.1. $P_3(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(5x^3-3x\right)$, $\|P_3\|=\sqrt{\frac{2}{7}}$.

1.3.3. $P_1^{(1)}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $P_2^{(1)}(x)=3x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

$P_2^{(2)}(x)=3\left(1-x^2\right)$; $P_3^{(1)}(x)=\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5x^2-1\right)$;

$P_3^{(2)}(x)=15x\left(1-x^2\right)$; $P_3^{(3)}(x)=15\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

1.3.5.

$$u(M,t)=\frac{2\cdot Y_2^{(-1)}(\theta,\varphi)}{3\sqrt{r}}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_1^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\mu_1^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{r_0}r\right).$$

1.3.6.

$$u(M,t)=\frac{2\cdot Y_2^{(1)}(\theta,\varphi)}{15\sqrt{r}}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_1^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}\cdot J_{\frac{7}{2}}\left(\frac{\mu_1^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{r_0}r\right).$$

1.3.7.

$$u(M,t)=\frac{2r_0^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{r}}\cdot Y_4^{(-3)}(\theta,\varphi)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{9}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{9}{2}\right)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{\left(\frac{9}{2}\right)}\cdot J_{\frac{11}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{9}{2}\right)}\right)}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{9}{2}\right)}}{r_0}\right)^2\cdot a^2\cdot t\right\}.$$

1.3.8.

$$u(M,t)=Y_2^{(1)}(\theta,\varphi)\cdot\left[\frac{r^2}{2r_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}\cdot J_{\frac{7}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}\right)\cdot J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{r_0}r\right)}{\left[\left(\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}\right)^2-6\right]\cdot\left[J_{\frac{5}{2}}\left(\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}\right)\right]^2}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{r_0}\right)^2 a^2 t\right\}\right]$$

где $\mu_k^{\left(\frac{5}{2}\right)}$ – k-ый положительный корень уравнения $2\mu \cdot J'_{\frac{5}{2}}(\mu) - J_{\frac{5}{2}}(\mu) = 0$.

1.4.2.

$$u(M,t) = \frac{2u_0}{a^2 r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{(0)}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[t + \frac{\exp\left\{-a^2 \lambda_k^{(0)} t\right\} - 1}{a^2 \lambda_k^{(0)}} \right] \frac{J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r\right)}{J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r_0\right)},$$

где $J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r_0\right) = 0$.

1.4.3. Пусть $J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r_0\right) = 0$, $\delta_k = 2 \cdot \left[r_0 \cdot \sqrt{\lambda_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r_0\right)\right]^{-1}$. Если при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $\lambda_k^{(0)} \neq \frac{\gamma}{a^2}$, то

$$u(r,t) = u_0 \left[e^{-\gamma t} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r\right) \left\{ \frac{\gamma \cdot e^{-\gamma t} - a^2 \lambda_k^{(0)} e^{-a^2 \lambda_k^{(0)} t}}{a^2 \lambda_k^{(0)} - \gamma} \right\} \right].$$

Если при некотором k_0 выполнено равенство $\lambda_{k_0}^{(0)} = \frac{\gamma}{a^2}$,

то $u(r,t) = u_0 \Big[e^{-\gamma t} + \delta_{k_0} \cdot J_0\left(\sqrt{\lambda_{k_0}^{(0)}}\, r\right) \cdot \{\gamma t - 1\} \cdot e^{-a^2 \lambda_{k_0}^{(0)} t} +$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{\infty} \delta_k J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\, r\right) \cdot \left\{ \frac{\gamma \cdot e^{-\gamma t} - a^2 \lambda_k^{(0)} e^{-a^2 \lambda_k^{(0)} t}}{a^2 \lambda_k^{(0)} - \gamma} \right\} \Big].$$

1.4.4. $u(r,t)=p\left[\frac{2a^2t}{r_0}-\frac{r_0}{4}+\frac{r^2}{2r_0}-\right.$

$\left.-\frac{2}{r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_k^{(0)}t}}{\lambda_k^{(0)}\cdot J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r_0\right)}\cdot J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right)\right],$ где

$J_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r_0\right)=0.$

1.5.2. $u(M,t)=x\cdot y+\left(e^{-t}+t-1\right)\cdot\sin x\cdot\cos y.$

1.5.3. $u(M,t)=1+\frac{1}{2}\cdot\left(\sin t-\cos t+e^{-t}\right)\cdot\sin x\cdot\sin y.$

1.5.4.

$u(M,t)=\frac{1}{4}\cdot\left(2t+e^{-2t}-1\right)\cdot\cos x+e^{-4t}\cdot\cos y\cdot\cos z.$

2.1.2. $u(M,t)=x^2+y^2-2z^2+xyzt^2+t.$

2.1.3. $u(M,t)=y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x^2+\frac{2}{45}t^6.$

2.1.4. $u(M,t)=x^2+t^2+t\cdot\sin y.$

2.1.5. $u(M,t)=x^2-y^2+txy+t^3xy.$

2.1.8. $0\le R_{OM}<at+r_0$ при $t<\frac{r_0}{a}$;

$$at - r_0 < R_{OM} < at + r_0 \quad \text{при} \quad t \ge \frac{r_0}{a}.$$

2.1.9. $0 \le R_{OM} < at + r_0$ при $t \ge 0$.

2.2.1.

$$u(M,t) = \frac{64 v_0 l_1^2 l_2^2}{\pi^6 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_{2m+1,2n+1}}\, at\right) \sin\left(\frac{\pi(2m+1)x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)y}{l_2}\right)}{(2m+1)^3 (2n+1)^3 \sqrt{\lambda_{2m+1,2n+1}}},$$

где $\lambda_{p,q} = \left(\frac{\pi p}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{l_2}\right)^2$.

2.2.2 $u(M,t) = \left(\cos t - \cos\left(\sqrt{2} t\right)\right) \cdot \cos x \cdot \cos y$.

2.2.3. $u(M,t) = \frac{1}{29}\left[t - \frac{\sin\left(\sqrt{29} t\right)}{\sqrt{29}}\right] \cdot \cos(5x) \cdot \cos(2y)$.

2.2.5. $u(M,t) = \frac{4}{5}\left[\left(\cos t - \cos\frac{3t}{2}\right) \cdot \sin\frac{3x}{2} + \right.$

$\left. + \left(5 \sin t - 2\sqrt{5} \sin\frac{\sqrt{5} t}{2}\right) \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos y\right]$.

2.3.1.

$$u(M,t) = \frac{v_0 r_0}{a \cdot \mu_7^{(8)}} \cdot J_8\left(\frac{\mu_7^{(8)}}{r_0} r\right) . \cos(8\varphi) \cdot \sin\left(\frac{\mu_7^{(8)}}{r_0} at\right).$$

2.3.2. $u(M,t)=u_0\cos\varphi\left[\frac{r}{r_0}-\right.$

$$\left.-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}r\right)}{\mu_k^{(1)}\cdot J_2\left(\mu_k^{(1)}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{r_0}at\right)\right].$$

3.1.1. $c=q-\frac{1}{4}\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right).$

3.1.3. $\min\limits_{M\in\bar{D}}v(M)=-1,\ \max\limits_{M\in\bar{D}}v(M)=1.$

3.1.4. $\min\limits_{M\in\bar{D}}v(M)=-\frac{1}{2},\ \max\limits_{M\in\bar{D}}v(M)=\frac{1}{2}.$

3.1.5. При любом $k>0$, $k\neq\frac{\pi n}{r_0}$, где n – натуральное число, задача имеет единственное решение $v(r)=\frac{p_0r_0}{\sin(kr_0)}\cdot\frac{\sin(kr)}{r}$; если при некотором натуральном n_0 число $k=\frac{\pi n_0}{r_0}$, то для $p_0\neq 0$ задача не имеет решений, а для $p_0=0$ задача имеет бесконечно много решений: $v(r)=B\cdot\dfrac{\sin(kr)}{r}$, где B – произвольная постоянная.

3.1.6. При любом $k>0$ задача имеет единственное решение $v(r)=\dfrac{q_0 r_0}{kr_0\cdot ch(kr_0)-sh(kr_0)}\cdot\dfrac{sh(kr)}{r}$.

3.1.8. $v(M)=\dfrac{v_0}{J_7(kr_0)}\cdot J_7(kr)\cos(7\varphi)$.

3.2.1. $v(M)=v_0 r_0\cdot\dfrac{e^{ik(r-r_0)}}{r}$.

3.2.2. $v(M)=\dfrac{\gamma\cdot r_0^2}{1-ikr_0}\cdot\dfrac{e^{ik(r-r_0)}}{r}$.

3.2.3. Некорректно: нет единственности решения.

3.2.4. Для функции $v(r)$ уравнение $\Delta v+v=0$ приводится к уравнению Бесселя $r^2v''+rv'+r^2v=0$ порядка 0. Оно имеет линейно независимые решения

$$J_0(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cdot\cos\left(r-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)\text{ при } r\to+\infty$$

$$N_0(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cdot\sin\left(r-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \text{ при } r\to+\infty.$$

Задача поставлена некорректно: нет единственности решения.

Литература

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. – М.: Наука, Изд-во Моск. Ун-та, 2004. – 798 с.
2. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
3. В.Я. Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 431 с.
4. Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик. Уравнения математической физики. – М.: Издат. центр “Академия”, 2010. – 316 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
6. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с.
7. А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. Задачи по математической физике. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1998. – 350 с.